СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Байбурина С. Г. и др. Тр. ФИАН СССР, 1984, **154**, с. 3—217. [2] Bayburina S. G. et al. In: Proc. of 18-th ICRC, 1983, v. 7, p. 420. [3] Erlykin A. D., Kuzina N. P. Preprint N 95, Leb. Phys. Inst., 1980. [4] Беляев А. А. и др. Электронно-фотонные каскады в космических лучах при сверхвысоких энергиях. М.: Наука, 1981. [5] Андреев И. В. Письма в ЖЭТФ, 1974, **20**, с. 199. [6] Анисович В. В., Браун Ю. М., Шабельский Ю. М. Ядерная физика, 1984, **39**, с. 932. [7] Гаряка А. П. и др. Изв. АН АрмССР, 1983, **18**, № 1, с. 66.

Поступила в редакцию
29.10.84

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1985, Т. 26, № 3

РАДИОФИЗИКА

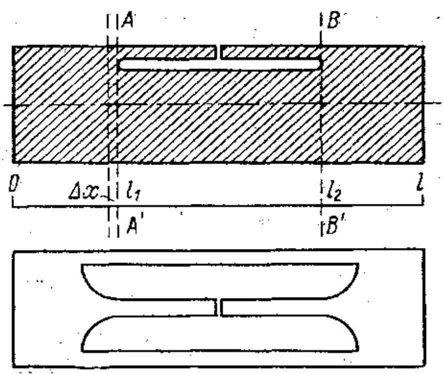
УДК 530.12

ВЛИЯНИЕ СВЯЗИ МЕЖДУ МОДАМИ КОЛЕБАНИЙ НА ДОБРОТНОСТЬ АНТЕННЫ ДЕТЕКТОРА ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН

В. П. Митрофанов, В. Н. Якимов

(кафедра физики колебаний)

Существенным фактором, определяющим чувствительность детектора гравитационного излучения веберовского типа, является механическая добротность антенны, которая, как правило, представляет собой массивный цилиндр, подвешенный на антисейсмической платформе. Импульс гравитационного излучения возбуждает упругие колебания в антенне на ее собственной частоте. Чувствительность детектора увеличивают, уменьшая тепловые шумы антенны. Это достигается ее охлаждением, а также применением материалов с малой диссипацией упругой энергии, таких как сапфир, кремний [1]. Регистрация колебаний антенны осуществляется датчиком, например емкостным. Одним из вариантов сопряжения датчика с антенной является преобразование ее продольных колебаний в изменение малого зазора между «рогами», которые выпиливаются в антенне. Ее форма показана на рисунке.



Усложнение формы антенны по сравнению с цилиндром приводит к изменению спектра собственных частот ее упругих колебаний и к возникновению связи между модами. При этом за счет перекачки энергии возможно уменьшение добротности основной продольной моды колебаний. Наибольшее влияние оказывает связь между продольной и изгибными модами колебаний антенны, так как последние обладают относительно невысокой добротностью, и для антенн, у которых длина существенно больше диаметра, в окрестности основной продольной моды находится несколько изгибных мод более высоких порядков.

Рога обычно выпиливаются таким образом, чтобы свести к минимуму искажения в распределении упругих деформаций при колебаниях антенны и не создать дополнительных источников потерь энергии в местах концентрации упругих напряжений. Масса рогов составляет менее 1% от полной массы антенны. В связи с этим в расчетах будем предполагать, что в антенне сложной формы возбуждаются упругие колебания, имеющие распределение деформаций, как в тонком гладком цилиндре постоянного сечения, а наличие рогов создает малое возмущение в таком распределении. Для низших мод колебаний можно использовать стандартные уравнения продольных и изгибных колебаний в бесконечно тонких стержнях, пренебрегая изменением деформаций в поперечном сечении. Без учета возмущений, связанных с рогами, продольные колебания цилиндра описываются функцией $u(x, t)$ смещения точек поперечного сечения вдоль его оси x, удовлетворяющей уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\delta_1 \frac{\partial u}{\partial t} = a_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{f_1(x, t)}{\rho S} \tag{1}$$

с граничными условиями для свободных концов

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0; t) = \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0,$$

где $a_1 = \sqrt{E/\rho}$, E — модуль Юнга, ρ — плотность, δ_1 — коэффициент затухания, $f_1(x, t)$ — плотность внешней силы.

Изгибные колебания описываются уравнением для смещений $v(x, t)$ в направлении оси y, перпендикулярной оси цилиндра:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2\delta_2 \frac{\partial v}{\partial t} + a_2^2 \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = -\frac{1}{\rho S} \frac{\partial^2 \mathcal{M}}{\partial x^2} \tag{2}$$

с граничными условиями для свободных концов

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(0, t) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(l, t) = 0, \quad \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(l, t) = 0,$$

где $a_2 = \sqrt{EJ/(\rho S)}$, J — момент инерции поперечного сечения относительно горизонтальной оси, проходящей через центр инерции, S — площадь поперечного сечения. Уравнение (2) записано для стержня, на который действуют внешние силы, создающие изгибающий момент $\mathcal{M}(x, t)$ в произвольном поперечном сечении.

Смещения при продольных и изгибных колебаниях происходят во взаимно перпендикулярных направлениях, и в первом приближении между ними нет связи. Учтем теперь конечное поперечное сечение стержня и то, что при изгибных колебаниях его элементы совершают не только поступательное, но и вращательное движение. Это дает небольшие поправки в уравнении колебаний и несколько изменяет собственные частоты [2], а в случае стержня сложной формы приводит к возникновению связи между продольной и поперечной модами. При изгибных колебаниях гладкого цилиндра ось вращения каждого элемента проходит через его центр инерции. Иначе обстоит дело в случае антенны сложной формы, изображенной на рисунке. Для элементов стержня Δx, расположенных в сечениях AA' и BB', мгновенная ось вращения не совпадает с центром инерции элемента и возникает сила, действующая вдоль стержня. Она равна произведению ускорения на массу той части стержня, которая за счет асимметрии поперечного сечения определяет сдвиг центра инерции. В рассматриваемом случае это масса рога и прилегающей к нему области, имеющей в продольном направлении размер порядка глубины выреза. В расчетах для простоты будем учитывать только массу рога m, предполагая, что она сосредоточена в точке на поверхности цилиндра. Ускорение этой массы, направленное вдоль стержня, может быть представлено как произведение углового ускорения вращения элемента стержня $\frac{\partial^3 v}{\partial x\, \partial t^2}$ на расстояние от мгновенного центра вращения (очевидно, оно незначительно отличается от радиуса цилиндра R).

Получаем, что в сечениях AA' и BB' действует сосредоточенная сила, направленная вдоль оси x, которую можно представить в виде δ-функции:

$$f_1(x,\ t) = mR \frac{\partial^3 v}{\partial x\, \partial t^2}\, \delta(x - x_0),$$

где $x_0 = l_1$ либо l_2.

Аналогично рассчитаем возбуждение изгибных колебаний в антенне за счет связи, если в ней существуют продольные колебания. При продольных колебаниях стержня в области изменения его поперечного сечения возникает момент сил инерции массы рога относительно оси изгиба $\mathcal{M} = -mR \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. Предполагая, что он приложен в точке x_0, запишем его в виде

$$\mathcal{M}(x_0,\ t) = -\int_0^l mR \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\, \delta(x - x_0)\, dx.$$

Таким образом, уравнения (1) и (2) оказываются связанными через силы, стоящие в их правых частях:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\delta_1 \frac{\partial u}{\partial t} - a_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{mR}{\rho S} \frac{\partial^3 v}{\partial x\, \partial t^2}\, \delta(x - x_0), \\ &\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2\delta_2 \frac{\partial v}{\partial t} + a_2^2 \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = \frac{mR}{\rho S} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\, \delta(x - x_0) \right]. \end{aligned} \tag{3}$$

Решение каждого из уравнений системы (3) при соответствующих граничных условиях будем искать в виде разложения в ряд по собственным функциям однородного уравнения:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\, \varphi_n(x), \tag{4}$$

$$v = \sum_{m=1}^{\infty} v_m(t)\, \psi_m(x), \tag{5}$$

где

$$\varphi_n = \cos \frac{n\pi x}{l},\quad \psi_m = \sqrt{2} \Big\{ (\operatorname{sh} \lambda_m x + \sin \lambda_m x) - \frac{\operatorname{sh} \lambda_m l - \sin \lambda_m l}{\operatorname{ch} \lambda_m l - \cos \lambda_m l} \cdot (\operatorname{ch} \lambda_m x + \cos \lambda_m x) \Big\} \quad [2].$$

Функции, стоящие в правых частях системы (3), также представим в виде рядов Фурье и проведем интегрирование. Подставляя предполагаемую форму решения (4) и (5) в систему уравнений (3), получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{d^2u_n}{dt^2}+2\delta_1\frac{du_n}{dt}+a_1^2\lambda_n^{(1)}u_n-\frac{2mR}{M}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{d^2v_m}{dt^2}\frac{d\psi_m}{dx}\bigg|_{x=x_0}\varphi_n(x_0)\right\}\varphi_n(x)=0,$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\frac{d^2v_m}{dt^2}+2\delta_2\frac{dv_m}{dt}-a_2^2\lambda_m^{(2)}v_m-\frac{2mR}{M}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{du_n}{dt}\frac{d\psi_m}{dt}\bigg|_{x=x_0}\varphi_n(x_0)\right\}\psi_m(x)=0. \quad (6)$$

Здесь $\lambda_n^{(1)}$ и $\lambda_m^{(2)}$ — собственные значения, соответствующие собственным функциям φ_n и ψ_m, $M=\rho Sl$ — полная масса стержня.

Взаимодействие мод происходит эффективно для колебаний с близкими частотами, в частности, интересующая нас основная мода продольных колебаний близка к третьей моде изгибных. Остальные моды стержня возбуждаются существенно слабее, и их можно исключить из рассмотрения. Оставляя в уравнениях (6) только две выбранные взаимодействующие моды, получаем два уравнения, связывающие $u_1(t)$ и $v_3(t)$:

$$\frac{d^2u_1}{dt^2}+2\delta_1\frac{du_1}{dt}+a_1^2\lambda_1^{(1)}u_1=\frac{2mR}{M}\frac{d^2v_3}{dt^2}\frac{d\psi_3}{dx}\bigg|_{x=x_0}\varphi_1(x_0),$$

$$\frac{d^2v_3}{dt^2}+2\delta_2\frac{dv_3}{dt}-a_2^2\lambda_3^{(2)}v_3=\frac{2mR}{M}\frac{d^2u_1}{dt^2}\frac{d\psi_3}{dx}\bigg|_{x=x_0}\varphi_1(x_0). \quad (7)$$

Введем следующие обозначения: $\alpha=\frac{2mR}{M}\frac{d\psi_3}{dx}\Big|_{x=x_0}\varphi_1(x_0)$ — коэффициент связи, $\nu_1^2=a_1^2\lambda_1^{(1)}=E\pi^2/(\rho l^2)$, $\nu_2^2=a_2^2\lambda_3^{(2)}=EJ\beta_3^4/(\rho Sl^4)$ — парциальные частоты ($\beta_3\approx 11$).

Уравнения (7) описывают колебания в системе с двумя степенями свободы с инерционными связями. Их решение хорошо известно (см., например, [3]). Рассмотрим случай, обычно реализующийся на практике, когда связанность в системе мала, т. е. $\alpha^2\nu_1^2\nu_2^2/(\nu_2^2-\nu_1^2)^2\ll 1$. Предположим также, что $\delta_1=0$. Это вполне оправданно, так как собственная добротность основной моды продольных колебаний кристаллических антенн более чем на два порядка превышает добротность изгибных мод нечетных порядков, имеющих пучность смещений в центральной части стержня. Взаимодействие в системе приводит к тому, что собственные частоты ω_1 и ω_2 отличаются от парциальных и коэффициенты затухания δ_1' и δ_2' на этих частотах изменяются:

$$\omega_1^2-\nu_1^2=-\frac{\nu_1^4}{\nu_2^2-\nu_1^2}\alpha^2,$$

$$\delta_1'=\delta_2\frac{\nu_1^4\alpha^2}{(\nu_1^2-\nu_2^2)(\omega_1^2-\omega_2^2)(1-\alpha^2)},$$

$$\delta_2'=\delta_2\frac{\omega_2^2-\nu_1^2}{(\omega_2^2-\omega_1^2)(1-\alpha^2)}.$$

Анализ приведенного выше выражения для коэффициента связи показывает, что он уменьшается при уменьшении отношения массы рога к полной массе антенны, а также зависит от величины $d\psi_3/dx$ производной от собственной функции моды изгибных колебаний в сечениях AA' и BB' (см. рисунок). Эта производная обращается в нуль в пучности изгибных колебаний, что может быть использовано для уменьшения коэффициента связи. Однако на практике не удается уменьшить связь до нуля ввиду сложности формы антенны.

Было проведено экспериментальное исследование добротности $Q=\omega/(2\delta)$ модели гравитационной антенны сложной формы, изготовленной из монокристалла кремния. Она имела длину $l\approx 60$ см, радиус цилиндрической части $R\approx 4$ см. Полная масса антенны $M\approx 6\cdot 10^3$ г. В эксперименте относительно просто определяются собственные частоты ω_1 и ω_2 колебаний антенны. Парциальные частоты обычно неизвестны. Однако, пользуясь условием малой связанности колебаний, можно упростить выражения для коэффициентов затухания, записав их в следующем виде:

$$\delta_1' \approx \delta_2 \frac{\nu_1^4 \alpha^2}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2},$$

$$\delta_2' \approx \delta_2.$$

В таблице приведены результаты расчета и экспериментальных исследований двух вариантов гравитационных антенн, отличающихся длиной рогов. При вычислениях учитывались оба рога, что в два раза увеличивает коэффициент связи по сравнению с введенным в уравнениях (7). Сравнение расчетных значений с данными эксперимента показывает, что рассмотренная модель дает удовлетворительное описание диссипативных процессов, возникающих из-за связанности колебаний в резонаторе сложной формы, каким является гравитационная антенна. Выбирая соответствующим образом размеры рогов, можно добиться минимальной связи между модами и, следовательно, максимальной добротности антенны.

x_0	m, г	$\frac{\omega_1}{2\pi}$, Гц	$\frac{\omega_2}{2\pi}$, Гц	Q_2	$\alpha_{расч}$	$Q'_{1\ расч}$	$Q'_{1\ эксп}$
$0,33l$	40	6,920	7,143	$3\cdot 10^5$	$1,9\cdot 10^{-2}$	$4\cdot 10^6$	$1,2\cdot 10^5$
$0,25l$	50	7,012	6,692	$3\cdot 10^5$	$1,2\cdot 10^{-3}$	$2\cdot 10^7$	$5\cdot 10^6$

Авторы искренне благодарят В. Б. Брагинского за внимание и помощь в работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Брагинский В. Б., Митрофанов В. П., Панов В. И. Системы с малой диссипацией. М.: Наука, 1981. [2] Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. М.: ИЛ, 1963. [3] Смайт В. Электростатика и электродинамика. М.: ИЛ, 1954.

Поступила в редакцию
21.12.83

После переработки
21.01.85