Авторы благодарят Ю. И. Кузнецова за обсуждение некоторых вопросов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Странные аттракторы. Под ред. Я. Г. Синая и Л. П. Шильникова. М.: Мир, 1981. [2] Lorenz E. N. J. Atm. Sci., 1963, 20, p. 130. [3] Лоскутов Ю. М., Алексеев В. В., Корниловский А. Н. Деп. ВИНИТИ № 4138-82 от 02.08.82. [4] Дудник Е. Н., Кузнецов Ю. И., Минакова И. И., Романовский Ю. М. Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон., 1983, 24, № 4, с. 84. [5] Хакен Г. Синергетика. М.: Мир, 1980. [6] Алексеев В. В. УФН, 1976, 120, с. 647. [7] Алексеев В. В., Корниловский А. Н. Биофизика, 1982, 27, с. 890. [8] Ott E. Rev. Mod. Phys., 1981, 53, p. 655. [9] Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В. Эргодическая теория. М.: Наука, 1980. [10] Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения. Вып. 1, 2. М.: Мир, 1971.

Поступила в редакцию
05.06.84

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1985, Т. 26, № 3

УДК 538.574

КРАЕВЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ И ИНТЕГРАЛЫ ПО ТРАЕКТОРИЯМ. ТРЕХМЕРНАЯ ЗАДАЧА

Л. И. Приходько, А. Н. Стародумов

(кафедра общей физики и волновых процессов)

Одна из проблем распространения волн в случайно-неоднородных средах связана с необходимостью решать краевую стохастическую задачу. Такая задача возникает при описании многократного обратного рассеяния, когда поле на границе является неизвестным функционалом от характеристик среды. Способы анализа краевых стохастических задач, развитые в работах [1—4], в основном применяются для решения либо одномерных задач, либо трехмерных с крупномасштабными неоднородностями. В работе авторов [5] статистический анализ одномерной граничной стохастической задачи проведен на основе метода функционального интегрирования. Этот метод в статистической теории волн использовался в работах [6, 7] при описании характеристик световой волны, распространяющейся в случайной среде с крупномасштабными неоднородностями. Применение этого метода, основанного на представлении функции Грина уравнения Гельмгольца в виде континуального интеграла, к краевым стохастическим задачам позволяет рассмотреть распространение волн в случайных средах без предварительных ограничений на характеристики среды и длину волны и свести краевую стохастическую задачу к краевой детерминированной. В настоящей работе функциональный подход развит для решения трехмерной краевой стохастической задачи.

Рассмотрим слой $0<z<L$ неоднородной среды с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(\mathbf{r})=1+\varepsilon_1(\mathbf{r})$, где $\varepsilon_1(\mathbf{r})$ — случайное статистически однородное и изотропное поле, распределенное по нормальному закону со средним значением $\langle\varepsilon_1\rangle=0$. На слой из области $z<0$ с $\varepsilon(z<0)=1$ падает нормально плоская волна $E_0e^{i(kz-\omega t)}$. При произвольном соотношении между размерами неоднородностей и длиной падающей волны могут происходить сильные изменения поляризации в случае многократного рассеяния. Однако математические трудности заставляют ограничиться скалярным волновым уравнением, причем уже в этом про-

стейшем случае проявляется специфика многократного рассеяния [8]. При этих условиях комплексная амплитуда поля в неоднородном слое подчиняется скалярному уравнению Гельмгольца

$$\Delta E + k^2 \varepsilon(\mathbf{r}) E = 0. \tag{1}$$

Как и в одномерном случае [5], поле в области $z<0$ представим в виде суммы падающего и отраженного полей, а в области $z>L$ — в виде поля прошедшей волны. Внутри неоднородного слоя решение уравнения (1) можно выразить через граничные значения поля и его нормальной производной по формуле Грина.

Представим граничное поле $E(\boldsymbol{\rho}, 0)$ двумерным интегралом Фурье по переменным $\varkappa_x$ и $\varkappa_y$:

$$E(\boldsymbol{\rho}, 0) = \int \widetilde{E}(\boldsymbol{\varkappa}_\perp, 0) e^{i\boldsymbol{\varkappa}_\perp \boldsymbol{\rho}} d\boldsymbol{\varkappa}_\perp,$$

где $\boldsymbol{\rho} = (x, y)$ — двумерный вектор, а $\boldsymbol{\varkappa}_\perp = (\varkappa_x, \varkappa_y)$ — двумерный волновой вектор (аналогично записывается поле на границе $z=L$). Используя условия непрерывности поля и его нормальной производной на границах неоднородного слоя, найдем связь между пространственными гармониками $E(\boldsymbol{\varkappa}_\perp, 0)$, $E(\boldsymbol{\varkappa}_\perp, L)$ и их производными на каждой из границ:

$$i\sqrt{k^2-\varkappa_\perp^2}\,\widetilde{E}(\boldsymbol{\varkappa}_\perp, 0) + \frac{\partial E(\boldsymbol{\varkappa}_\perp, 0)}{\partial z} = 2i\sqrt{k^2-\varkappa_\perp^2}\,E_0\delta(\boldsymbol{\varkappa}_\perp),$$

$$i\sqrt{k^2-\varkappa_\perp^2}\,\widetilde{E}(\boldsymbol{\varkappa}_\perp, L) + \frac{\partial E(\boldsymbol{\varkappa}_\perp, L)}{\partial z} = 0. \tag{2}$$

Тогда внутри неоднородного слоя поле запишется в следующем виде:

$$E = \frac{1}{(2\pi)^2}\int d\boldsymbol{\varkappa}_\perp \left\{ \int\limits_{z'=0} d\boldsymbol{\rho}' \cdot e^{i\boldsymbol{\varkappa}_\perp \boldsymbol{\rho}'} \left[2E_0\delta(\boldsymbol{\varkappa}_\perp)\frac{\partial G}{\partial z'} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\partial \widetilde{E}}{\partial z'}\left(G + \frac{1}{i\sqrt{k^2-\varkappa_\perp^2}}\frac{\partial G}{\partial z'}\right)\right] + \int\limits_{z'=L} d\boldsymbol{\rho}' \cdot e^{i\boldsymbol{\varkappa}_\perp \boldsymbol{\rho}'}\left(G - \frac{1}{i\sqrt{k^2-\varkappa_\perp^2}}\frac{\partial G}{\partial z'}\right)\frac{\partial \widetilde{E}}{\partial z'}\right\}, \tag{3}$$

где $G(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}', z, z')$ — функция Грина уравнения (1).

При усреднении по ансамблю реализаций ε_1 в правой части (3) появятся корреляторы в виде произведения двух функционалов от ε_1: $\left\langle G[\varepsilon_1]\frac{\partial}{\partial z}E[\varepsilon_1]\right\rangle$, и в общем случае расцепить эти корреляторы не представляется возможным. Однако для гауссовского случайного поля и для функционалов экспоненциального вида среднее от произведения двух функционалов удается представить в виде произведения средних [1].

Для решения задачи используем представление функции Грина уравнения Гельмгольца (1) в виде континуального интеграла в форме [5]

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = i\int\limits_0^\infty d\xi \int D^3 v\,\delta\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}' + \int\limits_0^\xi \mathbf{v}(\eta)\,d\eta\right)\exp\left\{\frac{i}{4}\int\limits_0^\xi v^2(\eta)\,d\eta + \right.$$

$$\left. + ik^2\xi + ik^2\int\limits_0^\xi \varepsilon_1\left(\mathbf{r} + \int\limits_{\xi'}^\xi \mathbf{v}(\eta)\,d\eta\right)d\xi'\right\}, \tag{4}$$

где $\mathbf{v}(\eta)$ — функциональная переменная [5], причем

$$D^3v = \frac{\prod\limits_{\eta=0}^{\xi} d^3v(\eta)}{\int \prod\limits_{\eta=0}^{\xi} d^3v(\eta) \exp\left\{i\int\limits_0^{\xi} \frac{v^2(\eta)}{4} d\eta\right\}},$$

и усредним (3) по ансамблю реализаций ε_1. Тогда среднее поле внутри неоднородного слоя примет следующий вид:

$$\langle E(\rho, z)\rangle = \frac{1}{(2\pi)^2}\int d\varkappa_\perp e^{i\varkappa_\perp\rho}\left\{-2E_0\delta(\varkappa_\perp)\frac{\partial I}{\partial z}\bigg|_{z'=0} - \right.$$

$$\left. -\left[I - \frac{1}{i\sqrt{k^2-\varkappa_\perp^2}}\frac{\partial I}{\partial z}\right]_{z'=0} + \left[I + \frac{1}{i\sqrt{k^2-\varkappa_\perp^2}}\frac{\partial I}{\partial z}\right]_{z'=L}\right\}, \qquad (5)$$

где

$$I(\varkappa_\perp, z, z') = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty d\xi \int d\varkappa_z \int D^3v \left\langle \frac{\partial E(\varkappa_\perp, z', v)}{\partial z}\right\rangle \exp\left\{\frac{i}{4}\int\limits_0^\xi v^2(\eta)\,d\eta + \right.$$

$$\left. + i\varkappa\int\limits_0^\xi \mathbf{v}(\eta)\,d\eta - \frac{k^4}{2}\int\limits_0^\xi\int\limits_0^\xi B\left(\int\limits_{\xi'}^{\xi''}\mathbf{v}(\eta)\,d\eta\right)d\xi'\,d\xi'' + i\varkappa_z(z-z') + ik^2\xi\right\}, \qquad (6)$$

B — функция корреляции случайного поля ε_1.

Выражение для среднего поля представляет собой операторную форму записи точного решения краевой стохастической задачи, и дальнейшее его упрощение связано с возможностью вычисления входящих в него интегралов.

Интеграл по функциональной переменной в (6) вычислим следующим образом. Вместо функционала $B(\xi', \xi''; \mathbf{v})$ введем функцию [9]

$$\overline{B}(\xi', \xi'') = \int D^3vB(\xi', \xi''; \mathbf{v})\exp\left\{\frac{i}{4}\int\limits_0^\xi v^2(\eta)\,d\eta\right\} \qquad (7)$$

и разложим экспоненту в (6) в ряд по степеням разности $(B-\overline{B})$, ограничившись нулевым членом разложения, а оставшийся интеграл по функциональной переменной вычислим методом стационарной фазы. Функционал $\left\langle\frac{\partial E}{\partial z}\right\rangle$ вынесем из-под знака интеграла, взяв его значение на экстремали $v=v^0$: $\left\langle\frac{\partial E}{\partial z}\right\rangle\Big|_{v=v^0} = A(z', \varkappa_\perp)$. Выполняя при этих условиях континуальное интегрирование и интегрирование по переменной ξ в выражении (6), найдем для I:

$$I(\varkappa_\perp, z, z') = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{A(z', \varkappa_\perp)e^{i\varkappa_z(z-z')}d\varkappa_z}{k^2-\varkappa^2+\frac{k^4}{\varkappa}\int\limits_0^\infty B(r)e^{i\varkappa r}\sin\varkappa r\,dr}. \qquad (8)$$

Для мелкомасштабных флуктуаций $kl \ll 1$, где l — радиус корреляции объемных изомерных неоднородностей, корреляционную функцию B можно аппроксимировать δ-функцией. Тогда при выполнении условия $\beta = (kl\sigma)^2 \ll 1$, где σ^2 — дисперсия флуктуаций диэлектрической прони-

цаемости ε_1, полюсы подынтегрального выражения в (6) равны

$$\varkappa_{1,2}=\pm(k^2-\varkappa_\perp^2)^{1/2}\left[1+\frac{k^2\beta}{4(k^2-\varkappa_\perp^2)}(1+ikl)\right].$$

Взяв вычеты подынтегрального выражения в интеграле (8) в полюсах $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$, для I окончательно получим

$$I=\frac{iA(z',\varkappa_\perp)}{2(k^2-\varkappa_\perp^2)^{1/2}}\exp\left\{i(k^2-\varkappa_\perp^2)^{1/2}|z-z'|\left[1+\frac{k^2\beta}{4(k^2-\varkappa_\perp^2)}(1+ikl)\right]\right\}\times$$
$$\times\left[1+\frac{k^2\beta}{4(k^2-\varkappa_\perp^2)}(1+ikl)\right]^{-1/2}. \qquad (9)$$

В выражение для среднего поля (5) входят две неизвестные величины $A(z'=0,\ L;\ \varkappa_\perp)$. Усреднив граничные условия по ансамблю реализаций ε_1, получим систему четырех алгебраических уравнений для определения $A(z'=0,\ L;\ \varkappa_\perp)$ и средних коэффициентов отражения и прохождения для спектральных компонент. Разрешая эту систему с учетом (9), найдем окончательное выражение для среднего поля в случайно-неоднородном слое с объемными неоднородностями:

$$\langle E(\rho,\ z)\rangle=E_0\left\{\left[1-\frac{\beta}{8}(1+ikl)\right]\exp\left\{ik\left[1+\frac{\beta}{4}(1+ikl)\right]z\right\}+\right.$$
$$\left.+\frac{\beta}{8}(1+ikl)\exp\left\{ik\left[1+\frac{\beta}{4}(1+ikl)\right](2L-z)\right\}\right\}. \qquad (10)$$

Первое слагаемое в (10) описывает волну, распространяющуюся в слое в положительном направлении z, а второе слагаемое — среднее обратно рассеянное поле, причем при увеличении толщины слоя L когерентная составляющая поля, рассеянного назад, экспоненциально спадает. Средний коэффициент отражения от слоя толщины L имеет вид

$$\langle R(L)\rangle=E_0\frac{\beta}{8}(1+ikl)\left[\exp\left\{2ikL\left[1+\frac{\beta}{4}(1+ikl)\right]\right\}-1\right].$$

Для полубесконечного слоя ($L\to\infty$) средний коэффициент отражения равен постоянному значению, отличному от нуля:

$$\langle R_\infty\rangle=-E_0\frac{\beta}{8}(1+ikl).$$

Выражение (10) можно интерпретировать как плоскую волну, распространяющуюся в однородном поглощающем слое с эффективным значением диэлектрической проницаемости

$$\varepsilon_{\text{эфф}}=1+\frac{(kl\sigma)^2}{2}+i\frac{(kl)^3\sigma^2}{2}. \qquad (11)$$

При этом, как и в одномерном случае, действительная добавка в (11) описывает увеличение фазового пути за счет многократного рассеяния, а мнимая — затухание среднего поля вследствие перехода когерентной части поля в некогерентную составляющую. Таким образом, с помощью введения эффективной диэлектрической проницаемости в случайно-неднородной среде краевая стохастическая задача свелась к краевой детерминированной для среды с $\varepsilon_{\text{эфф}}$.

Отметим, что приближенное вычисление континуального интеграла (6) с помощью замены (7) справедливо при выполнении условия

$(kl\sigma)^2 \ll 1$. В этом случае аппроксимация (7) эквивалентна использованию приближения Бурре при решении уравнения Дайсона для среднего поля в безграничной среде [10]. Отметим также, что предлагаемый подход к решению краевой стохастической задачи позволяет рассмотреть и другие предельные случаи, в частности случай мелкомасштабных сильнофлуктуирующих сред, когда выполняется обратное соотношение $(kl\sigma)^2 \gg 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Кляцкин В. И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. М.: Наука, 1980. [2] Kohler W., Papanicolaou G. C. J. Math. Phys., 1974, 15, p. 2186. [3] Рыжов Ю. А. Изв. вузов. Радиофизика, 1973, 16, с. 1240. [4] Саичев А. И. Изв. вузов. Радиофизика, 1980, 23, с. 1163. [5] Приходько Л. И., Стародумов А. Н. Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон., 1983, 24, № 4, с. 45. [6] Кляцкин В. И., Татарский В. И. ЖЭТФ, 1970, 78, с. 624. [7] Заворотный В. У., Кляцкин В. И., Татарский В. И. ЖЭТФ, 1977, 73, с. 481. [8] Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. Ч. 2. М.: Наука, 1978. [9] Блохинцев Д. И., Барбашов Б. М. УФН, 1972, с. 493. [10] Keller J. B. et al. Radio Sci., 1969, 4, p. 1067.

Поступила в редакцию
11.07.84

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1985, Т. 26, № 3

ОПТИКА И СПЕКТРОСКОПИЯ

УДК 535.3

ВЛИЯНИЕ НЕКОГЕРЕНТНОСТИ ЛАЗЕРНЫХ ИМПУЛЬСОВ НА ХАРАКТЕРИСТИКИ СИГНАЛА НЕСТАЦИОНАРНОЙ АКТИВНОЙ СПЕКТРОСКОПИИ

С. Ю. Никитин

(кафедра общей физики и волновых процессов)

Введение. Возможность применения метода нестационарной активной спектроскопии (см., например, [1, 2]) для исследования тех или иных процессов релаксации в газах, жидкостях и твердых телах определяется соотношением между временем релаксации $\tau_р$ и длительностью лазерных импульсов $\tau_и$, используемых для возбуждения и зондирования среды. В идеальной схеме нестационарной спектроскопии должно выполняться условие $\tau_и \ll \tau_р$; в этом случае импульсный отклик несет в себе наиболее полную информацию об исследуемых релаксационных процессах. Если же, напротив, $\tau_и \gg \tau_р$, то форма и длительность регистрируемого сигнала практически не зависят от свойств среды, а целиком определяются параметрами лазерных импульсов [1, 2].

Положение становится более сложным, если используемые световые импульсы являются некогерентными, т. е. случайно модулированными. В отличие от когерентных (или спектрально ограниченных) импульсов некогерентные импульсы характеризуются уже не одним, а двумя временными параметрами: длительностью $\tau_и$ и временем корреляции шумовой субструктуры $\tau_к$. Характер взаимодействия таких импульсов со средой зависит от соотношения трех параметров: $\tau_р$, $\tau_и$, $\tau_к$, и количество возможных режимов взаимодействия значительно возрастает.