ную ориентацию спина конечного лептона, в формуле (14) растет с уменьшением Δ и обусловлено как аксиально-векторным, так и векторным взаимодействием.

Авторы выражают благодарность проф. А. А. Соколову за внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Ритус В. И. Тр. ФИАН, т. 111. М.: Наука, 1979. [2] Жуковский В. Ч., Никитина Н. С. ЖЭТФ, 1973, 64, с. 1169. [3] Тернов И. М., Родионов В. Н., Студеникин А. И. Ядерная физика, 1983, № 5, с. 37. [4] Leahy D. A., Unruh W. G. Phys. Rev. D, 1979, 19, p. 3509. [5] Вшивцев А. С., Эминов П. А., ТМФ, 1980, 44, № 2, с. 284. [6] Соколов А. А., Жуковский В. Ч., Кормильцев Г. В., Эминов П. А. Изв. вузов. Физика, 1983, № 12, с. 61.

Поступила в редакцию
13.06.84

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1985, Т. 26, № 4

УДК 530.145

О КВАНТОВЫХ ПРЕДЕЛАХ ОШИБОК ИЗМЕРЕНИЯ В РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМАХ

Ю. И. Воронцов

(кафедра физики колебаний)

В последние десять лет в связи с разработкой детекторов гравитационного излучения много внимания уделялось квантовым ограничениям ошибок измерения различных наблюдаемых у механических осцилляторов и свободных масс [1—4]. Но рассматривались простейшие модели с одной степенью свободы. Реальные макроскопические системы всегда имеют множество степеней свободы, и практически невозможно связать измерительный прибор только с одной из них. В твердотельных гравитационных антеннах регистрируется либо движение торцов стержня, либо растяжение в его центре. В обоих случаях регистрируется суперпозиция нормальных колебаний, а не отдельное из них. Поэтому распространение результатов исследования систем с одной степенью свободы на реальные системы не всегда может быть оправданно. Выяснению квантовомеханических ограничений ошибок измерения наблюдаемых, являющихся суперпозицией нормальных движений в одномерной распределенной системе и посвящена данная работа.

При относительно малых амплитудах смещения гейзенберговский оператор смещения $\hat{Q}(x, t)$, относящийся к пространственной координате x системы, можно представить в следующем виде [5]:

$$\hat{Q}(x, t)=\sum_{n=0}^{N} Q_n(x)\,\hat{q}_n(t), \qquad (1)$$

где $\hat{q}_n(t)$ — гейзенберговские операторы нормальных координат, $Q_n(x)$ — собственные функции системы. В случае однородного свободного стержня

$$Q_n(x)=\sqrt{2}\cos(n\pi x/l), \qquad (2)$$

где N — число степеней свободы системы, l — средняя длина стержня.

Рассмотрим вначале идеализированный случай системы с бесконечным числом степеней свободы и эквидистантным спектром собственных частот. Чтобы прибор реагировал только на одну из нормальных координат, он должен был бы взаимодействовать с системой по всей ее длине так, чтобы в него поступал сигнал, равный

$$\widehat{q}_n(t) = \frac{1}{l}\int\limits_0^l \widehat{Q}(x, t)\, Q_n(x)\, dx. \qquad (3)$$

Тогда предел ошибки измерения наблюдаемой q был бы таким же, как и в системе с одной степенью свободы.

Квантовый предел ошибки измерения координаты торца свободного стержня определяется видом коммутатора $[\hat{Q}(0, t_1), \hat{Q}(0, t_2)]$. Используя соотношения (1) и (2), получим

$$[\widehat{Q}(0, t_1), \widehat{Q}(0, t_2)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2i\hbar}{M\omega_n} \sin\omega_n(t_2 - t_1) \equiv i\hbar K(t_2 - t_1). \qquad (4)$$

Если наблюдаемая не является интегралом движения или если измерение не является невозмущающим [1], то показания прибора будут по-разному относиться к состояниям системы до и после измерения.

Измерение может быть однократным (когда с исследуемой системой в течение времени τ_i взаимодействует единственная частица, служащая в качестве квантового считывающего звена прибора) или непрерывным в течение времени τ (когда в качестве квантового считывающего звена используется достаточно плотный поток частиц).

Формально квантовая теория допускает такие однократные измерения любых наблюдаемых, при которых показания прибора зависят только от состояния системы до измерения и не зависят от возмущения со стороны прибора [6]. Идея такого измерения состоит в следующем. Допустим, что гамильтониан взаимодействия пробной частицы с системой равен $\beta\hat{Q}\hat{y}$, где $\hat{Q}$ — измеряемый оператор, $\hat{y}$ — оператор координаты частицы, β — коэффициент связи. Если масса частицы настолько большая, что можно пренебречь спонтанным расплыванием волнового пакета частицы за время наблюдения, то оператор импульса частицы после взаимодействия с линейной системой в течение времени τ_i будет равен

$$\widehat{p}_y(t) = \widehat{p}_y(0) + \beta\int\limits_0^{\tau_i} \widehat{Q}(t)\, dt = \widehat{p}_y(0) + \beta\int\limits_0^{\tau_i} \widehat{Q}_0(t)\, dt + \widehat{y}(0)\beta^2 \int\limits_0^{\tau_i} dt \int\limits_0^t K(\zeta)\, d\zeta, \qquad (5)$$

где $\hat{Q}_0(t)$ — оператор системы при ее свободной эволюции, $\hat{p}_y(0)$, $\hat{y}(0)$ — операторы импульса и координаты частицы в момент начала ее взаимодействия с системой.

Начальное состояние частицы можно приготовить таким, чтобы было

$$\hat{p}_y(0) = \hat{p}_y^0 - \hat{y}(0)\, a(\tau_i), \qquad (6)$$

где

$$a(\tau_i) = \beta^2 \int\limits_0^{\tau_i} dt \int\limits_0^t K(\zeta)\, d\zeta,$$

$\hat{p}_y^0$ — не коррелированная с $\hat{y}(0)$ часть импульса. Тогда из (5), (6) найдем, что разность $\hat{p}_y(t) - \hat{p}_y^0$ будет зависеть только от невозмущенного значения интеграла $\int\limits_0^{\tau_i} \widehat{Q}_0(t)\, dt$. Дисперсия результатов таких измерений интеграла от $Q_0(t)$ при $\beta \to \infty$ будет зависеть только от начального состояния системы. Реальное $Q(t)$ во время измерения будет отличаться от $Q_0(t)$ тем больше, чем больше β (чем меньше ошибка измерения величины $\int\limits_0^{\tau_i} \widehat{Q}_0(t)\,dt$).

Величина $[p_y(t) - p_y(0)]\beta^{-1}$ дает информацию о значении интеграла от полного значения наблюдаемой $Q(t)$ во время измерения. При $\beta \to \infty$ это значение интеграла может быть измерено точно. Однако дисперсия результатов таких измерений независимо от исходного состояния системы будет бесконечно большой.

Практически однократные измерения не представляют интереса, так как их точность не может быть достаточно высокой из-за ограниченности коэффициента связи β. Типичными являются измерения, в которых используются достаточно плотные потоки частиц (электронов, фотонов). Такие измерения называются непрерывными. Приборы, осуществляющие непрерывные измерения координат, характеризуются обобщенной случайной силой $F(t)$, действующей со стороны прибора на систему, и случайным сигналом $q(t)$ на входе прибора, адекватным собственным флуктуациям прибора. В случае стационарных измерений спектральные плотности $S_f(\omega)$ (производной dF/dt) и $S_q(\omega)$ удовлетворяют соотношению [7]

$$S_f S_q - |S_{fq}|^2 \geqslant \frac{(\hbar\omega)^2}{4} + \hbar\omega\,|\mathrm{Re}\,S_{fq} - S_q\,\mathrm{Re}\,Y_{11}|, \tag{7}$$

где Y_{11} — реальная часть входной проводимости прибора, S_{fq} — перекрестная спектральная плотность функций $q(t)$ и dF/dt. Если бы прибор обладал бесконечно малой инерционностью, то приближенное измерение наблюдаемой $Q(t)$ можно было бы представить как результат точного измерения оператора

$$\widehat{\widehat{Q}}(t) = \widehat{Q}(t) + \int\limits_0^t F(t')\,K(t-t')\,dt' + q(t). \tag{8}$$

За начало отсчета времени взят момент начала взаимодействия прибора с системой.

Показания реальных приборов соответствуют некоторому функционалу от $Q(t)$. Рассмотрим частный случай, когда показания прибора соответствуют среднему за некоторый интервал времени τ значению $Q(t)$.

Дисперсия σ_m^2 суммы

$$\frac{1}{\tau}\int\limits_0^{\tau} dt_1 \int\limits_0^{t_1} F(\zeta)\,K(t_1-\zeta)\,d\zeta + \frac{1}{\tau}\int\limits_0^{\tau} q(t')\,dt' \tag{9}$$

определяется состоянием прибора и динамическими свойствами системы. Величину σ_m будем называть среднеквадратичной ошибкой измерения, а стандартное отклонение σ_a второго слагаемого в этой сумме — среднеквадратичной погрешностью прибора.

Если длительность взаимодействия τ_i отдельных частиц с системой много меньше интервала усреднения τ, то функции $F(t)$ и $q(t)$ можно считать δ-коррелированными. Взаимная корреляция функций $F(t)$ и $q(t)$, как видно из соотношения (7), приведет к увеличению произведения спектральных плотностей $S_f S_q$ и не даст того эффекта, который дает корреляция при однократном измерении. Положим $S_{Iq}=0$. Пренебрежем входной проводимостью прибора ($Y_{11}=0$). Ошибка измерения в этом случае будет равна

$$\sigma_m^2=\frac{S_q}{\tau}+\frac{S_F}{\tau^2}\int\limits_0^\tau dt\left|\int\limits_0^t K(t-\zeta)\,d\zeta\right|^2. \tag{10}$$

Если измеряется положение торца $Q(0, t)$ свободного стержня, то функция $K(t)$ удовлетворяет соотношению (4) и будет

$$\int\limits_0^\tau dt\left|\int\limits_0^t K(t-\zeta)\,d\zeta\right|^2=\int\limits_0^\tau dt\left|\frac{2}{\omega_1^2 M}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(1-\cos n\omega_1 t)\right|^2. \tag{11}$$

При $\omega_1\tau\ll 2\pi$ из соотношений (10) и (11) получим

$$\sigma_{mQ}^2=\frac{S_q}{\tau}+\frac{\pi^2\tau S_F}{3\omega_1^2 M^2}. \tag{12}$$

Поскольку в рассматриваемом случае $S_F S_q\geqslant\hbar^2/4$, то

$$\sigma_{mQ}^2\geqslant\frac{\pi\hbar}{\omega_1 M\sqrt{3}}. \tag{13}$$

Таким образом, предел ошибки измерения среднего за время τ положения торца стержня (идеализированного) при $\omega_1\tau<2\pi$ не зависит от τ и определяется только его характеристическим сопротивлением $\rho\equiv\pi/(\omega_1 M)$. В случае $\omega_1\tau\gg 2\pi$ получим

$$\sigma_{mQ}^2\geqslant\frac{\hbar\tau}{2\sqrt{5}M}. \tag{14}$$

Соотношение (14) соответствует ошибке измерения среднего за τ положения сосредоточенной массы M при непрерывном стационарном измерении координаты [8, 9].

Ошибка измерения длины стержня $L=Q(l, t)-Q(0, t)$ зависит от способа ее измерения. Если длина определяется как результат независимых измерений координат торцов, то ошибка измерения будет равна $\sqrt{2}\sigma_{mQ}$. Если же прибор реагирует непосредственно на разность $Q(l, t)-Q(0, t)$, то в соотношении (10) следует считать

$$K(t_2-t_1)\equiv\frac{1}{i\hbar}[L(t_1),\ L(t_2)]=\frac{8}{\omega_1 M}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\sin[(2n+1)\,\omega_1(t_2-t_1)]. \tag{15}$$

При $\omega_1\tau<\pi$ получим предел ошибки измерения длины стержня

$$\sigma_{mL}\geqslant\sqrt{\frac{2\hbar}{\rho\sqrt{3}}}, \tag{16}$$

равный ошибке измерения при независимых измерениях координат торцов. При $\omega_1\tau\gg\pi$ будет

$$\sigma_{mL}\geqslant\sqrt{\frac{\hbar\cdot 2\pi}{\rho\omega_1\tau\sqrt{3}}}. \tag{17}$$

Независимость ошибки измерения длины от длительности измерения при $\omega_1\tau<\pi$ делает невозможным использование метода стробирования в гравитационных экспериментах [8], если прибор реагирует на координаты торцов стержня. Метод стробирования может быть использован, если прибор будет связан только с одной нормальной координатой стержня.

Импульсная характеристика реальных стержней отличается от идеализированной, определяемой соотношением (4). Спектр собственных частот реального стержня ограничен некоторой критической частотой ω_c. Поэтому полученные выше соотношения справедливы только при $\omega_c\tau\gg 1$.

Соотношения (12)—(17) определяют предел ошибки измерения не только координат концов стержня, но и обобщенных координат любой одномерной распределенной системы, если им соответствует соотношение (4). В случае двухпроводной линии аналогом $Q(x, t)$ является заряд, прошедший через один из проводов за время t. Эквивалентная масса линии равна ее полной индуктивности.

Предел ошибки измерения напряжения на конце разомкнутой линии будет равен при $\omega_1\tau<\pi$ пределу ошибки измерения эдс батареи с внутренним сопротивлением ρ. Эквивалентная схема прибора, измеряющего напряжение, так же как и прибора, измеряющего координату, содержит два источника случайных сигналов. Случайное воздействие на систему можно отобразить либо источником случайного заряда, либо источником случайного тока $I(t)$. Приближенное измерение мгновенного значения эдс батареи можно представить как результат точного измерения оператора

$$\tilde{\varepsilon}(t)=\hat{\varepsilon}(t)+I(t)\cdot\rho+u(t), \tag{18}$$

где $u(t)$ — случайное напряжение, играющее ту же роль, что и случайный заряд $q(t)$ в соотношении (8).

При непрерывном стационарном измерении в случае отсутствия корреляции между $I(t)$ и $u(t)$ спектральная плотность флуктуаций суммы $I(t)\rho+u(t)$ была бы равна $S=\rho^2 S_I+S_u$. Функции $S_I(\omega)$ и $S_u(\omega)$ удовлетворяют соотношению (7), следовательно, будет $S_I S_u\geqslant\geqslant(\hbar\omega/2)^2$. Квадрат модуля частотного коэффициента передачи цепи, осуществляющей операцию $(1/\tau)\int\limits_0^\tau\tilde{\varepsilon}(t)\,dt$, равен $\sin^2(\omega\tau/2)/(\omega\tau/2)^2$. Интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\,\frac{\sin^2(\omega\tau/2)}{(\omega\tau/2)^2}\,d\omega$$

будет расходящимся. Следовательно, ошибка измерения среднего за τ значения эдс в этом случае будет равна бесконечности. Можно показать, что и при взаимной корреляции функций $I(t)$ и $u(t)$ будет $S\geqslant\rho\hbar\omega$ и, следовательно, ошибка останется бесконечной.

Ошибка измерения может быть конечной, если модуль выходного сопротивления источника напряжения в области высоких частот падает не медленнее чем ω^{-1}. Например, если внутреннее сопротивление источника ρ шунтировано емкостью C, то при $\tau\gg\rho C=\tau_0$ будет $\sigma_{m\varepsilon}\geqslant\sqrt{\hbar\rho/(\tau\tau_0)}$.

Заметим, что речь идет об ошибке измерения среднего за τ значения напряжения, а не об обнаружении известного по форме сигнала. Простой расчет по теории линейной фильтрации показывает, что прямоугольный импульс напряжения длительностью τ_ε может быть обнаружен, если его амплитуда $\varepsilon_0\geqslant\sqrt{\hbar\rho/\tau_\varepsilon}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Braginsky V. B., Vorontsov Yu. I., Thorne K. S. Science, 1980, **209**, p. 547. [2] Caves C. M. et al. Rev. Mod. Phys., 1980, **52**, p. 341. [3] Unruh W. G. Phys. Rev. D, 1978, **18**, p. 1764. [4] Додонов В. В., Манько В. И., Руденко В. Н. ЖЭТФ, 1980, **78**, с. 881. [5] Люисел У. Излучение и шумы в квантовой электронике. М.: Наука, 1972, с. 210. [6] Воронцов Ю. И., Халили Ф. Я. ЖЭТФ, 1982, **82**, с. 72. [7] Воронцов Ю. И., Халили Ф. Я. Радиотехн. и электроника, 1982, **27**, с. 2392. [8] Брагинский В. Б., Воронцов Ю. И., Халили Ф. Я. Письма в ЖЭТФ, 1978, **27**, с. 296. [9] Халили Ф. Я. Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон., 1981, **22**, № 1, с. 37.

Поступила в редакцию
31.08.84

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1985, Т. 26, № 4

УДК 531.87

ИЗЛУЧЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ С УЧАСТКА ТРАЕКТОРИИ

Р. Гонзалес Фелипе (Куба), Ю. Г. Павленко

(кафедра теоретической физики)

Хорошо известно, что спектр излучения ультрарелятивистских частиц существенно зависит от соотношения между характерным углом отклонения $\Delta\alpha$ частицы во внешнем поле и углом раствора $\sim m/\varepsilon$ конуса излучения [1—3]. Мы рассмотрим случай $\Delta\alpha \gg m/\varepsilon$, когда частица излучает в данном направлении с небольшого участка траектории. Обычно для вычисления спектра спонтанного излучения используется приближение заданного тока, а исследование индуцированных процессов проводится в два этапа — необходимо найти закон движения частицы в поле волны, а затем вычислить работу, совершаемую волной над частицей [1, 4].

В этой работе мы используем каноническую теорию возмущений [5], универсальную в том смысле, что любые экспериментально измеряемые величины вычисляются единым образом, причем спонтанные и индуцированные процессы (как и в квантовой электродинамике) вычисляются одновременно.

1. **Каноническая теория возмущений.** Пусть z_μ — фазовые координаты некоторой системы, $H(z, \tau)$ — гамильтониан, $F=F(z, \tau)$ — произвольная динамическая переменная, τ — параметр. В работе [5] показано, что решение уравнения, которому удовлетворяет $F(z, \tau)$, можно представить в виде

$$F(\tau)=\int\limits_{\tau_0}^{\tau} d\tau_1 \int\limits_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau_2 \ldots \int\limits_{\tau_0}^{\tau_{n-1}} d\tau_n \times$$

$$\times [\ldots [F(z_0, \tau), H(z_0, \tau_1)] H(z_0, \tau_2)] \ldots] H(z_0, \tau_n)]. \qquad (1)$$

Здесь скобки Пуассона (СП) вычисляются по переменным $z_0=z(\tau_0)$. Доказательство единственности решения и оценки радиуса сходимости могут быть получены на основе метода мажорантных рядов Коши, принципа сжатых отображений и других методов.

В соответствии с [5] представим гамильтониан частицы, взаимодействующей с внешним полем $A_\mu^{\text{ext}}(x)$ и свободным полем $A_\mu(x)$ в виде

$$H=H_0+H_I,$$