смысл [4] радиуса $d$-мерной сферы в данной точке базы $M$, причем вакууму соответствует $\langle\rho\rangle_0=a\neq 0$, т. е. $m_\psi=a^{-1}$. Однако член $\overline{\Psi}\rho\Psi$ не эквивалентен обычному юкавскому взаимодействию в теориях Великого объединения и не обеспечивает расщепления масс частиц, входящих в $G$-мультиплет.

В произвольной калибровке в (7) появляется еще член $\sim\overline{\Psi}(x)E_a^m e_m^{\widehat{\alpha}}Q_{\widehat{\alpha}}\Psi(x)$, учитывающий кривизну расслоения $K(G/H, F, H)$. В (8) он компенсируется слагаемым $\overline{\psi}(x)[D(L)E_a^m\partial_m D(L^{-1})]\psi(x)$, так что лагранжиан линейно преобразующихся полей имеет вид (8) в произвольной калибровке.


СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Kaluza Th. Sitzungsber Preuss. Acad. Wiss. Berlin, Math. Phys., Kl, 1921, p. 966. [2] Cho Y. M. J. Math. Phys., 1975, 16, p. 2029. [3] Abdus Salam, Strathdee J. Ann. Phys., 1982, 141, p. 316. [4] Демичев А. П., Нелипа Н. Ф. Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон., 1985, 26, № 3, с. 20. [5] Зуланке Р., Винтген П. Дифференциальная геометрия и расслоения. М.: Мир, 1975. [6] Coleman S., Wess J., Zumino B. Phys. Rev., 1969, 177, p. 2239.



Поступила в редакцию
16.10.84

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1985, Т. 26, № 4.

УДК 539.141


## ОДИН МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ СЛАБОСВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЙ МНОГОЧАСТИЧНЫХ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ


**В. В. Комаров, А. М. Попова**

*(НИИЯФ)*


1. Рассматривается оператор Шрёдингера $H_N$ систем $N$ попарно взаимодействующих частиц. В системе центра инерции этот оператор действует в пространстве размерностью $(R^{3N-3})$ и определяется выражением

$$H_N=H_{N0}+\sum_\alpha V_\alpha,\ \alpha=\{ij\},\ i\neq j\subset\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots,\ N\},\tag{1}$$

где $H_{N0}$ — оператор кинетической энергии в $L^2(R^{3N-3})$, а $V_\alpha$ — оператор взаимодействия пары $\alpha$, состоящей из частиц $i$ и $j$. Операторы $V_\alpha$ действуют в пространстве размерностью $(R^3)$, так как зависят от $x_\alpha$ — разности координат частиц $i$ и $j$. Характерной особенностью многочастичного оператора Шрёдингера является то, что потенциал в (1) вида $\sum\limits_\alpha V_\alpha$ не убывает при уходе системы на бесконечность в конфигурационном пространстве $(R^{3N-3})$, даже если каждый из потенциалов $V_\alpha$ является ограниченным и короткодействующим. Отмеченные выше свойства $H_N$ приводят, как показано в работах [1—3], к сложной зависимости структуры его дискретного спектра и местоположения непрерывного спектра от вида потенциалов $V_\alpha(x_\alpha)$ и от величины константы связи $\tau$, характеризующей силу двухчастичного взаимодействия.

В данной работе мы приводим достаточные условия существования слабосвязанных состояний оператора $H_N$ в случае, когда ни одна из двухчастичных подсистем $\alpha$, определенных оператором взаимодействия $V_\alpha$, не имеет ни связанных, ни виртуальных состояний [4]. В нашем анализе используются идеи метода Бирмана [5], развитого для оценки числа отрицательных точек спектра оператора Шрёдингера в $N$-мерном пространстве с потенциалом, быстро убывающим в $(R^N)$, а также методы перестройки резольвентных уравнений [1, 6] многочастичной теории рассеяния.

2. Предположим, что все $V_\alpha(x_\alpha)$ отрицательны и быстро убывают с ростом $|x_\alpha|$: $|V_\alpha(x_\alpha)| = C(1+|x_\alpha|)^{-2-\varepsilon}$, $\varepsilon>0$. Пусть ни один из $V_\alpha$ не допускает связанного или виртуального состояния в паре $\alpha$. Тогда непрерывный спектр $H_N$ расположен на действительной полуоси $[-\Sigma, \infty)$ [2] и $\Sigma=0$. Допустим, что оператор $H_N$ имеет $n$ точек дискретного спектра $\lambda_n$, расположенных на действительной оси левее непрерывного спектра. Введем однопараметрическое семейство операторов $H_N(\tau)$, $0\leqslant\tau\leqslant1$, вида

$$H_N(\tau) = -H_{N0} + \tau\sum_\alpha V_\alpha = H_N - (1-\tau)\sum_\alpha V_\alpha. \tag{2}$$

В соответствии с определенными выше условиями операторы $H_N(\tau)$ должны удовлетворять неравенству $H_N(\tau)\geqslant H_N$ и, следовательно, собственные значения $\lambda_n(\tau)$ оператора $H_N(\tau)$ должны быть монотонно убывающими функциями, такими, что $\lambda_n\leqslant\lambda_n(\tau_n)\leqslant-\Sigma$. Отсюда для каждого $\lambda_n$ найдется такое значение $\tau_n$, при котором $\lambda_n(\tau_n)=-\Sigma$, и найдется соответствующая собственная функция $\varphi_n(\tau_n)$ оператора $H_N(\tau_n)$, удовлетворяющая уравнению

$$[H_{N0}+\Sigma I]\,\varphi_n(\tau_n) = -\tau_n\Big(\sum_\alpha V_\alpha\Big)\varphi_n(\tau_n) \tag{3}$$

или

$$\varphi_n(\tau_n) = -\tau_n\Big[R_0(-\Sigma)\sum_\alpha V_\alpha\Big]\varphi_n(\tau_n),\quad R_0(-\Sigma) = [H_0+\Sigma I]^{-1}.$$

Если бы потенциал $\sum\limits_\alpha V_\alpha$ убывал во всем конфигурационном пространстве $(R^{3N-3})$, уравнение (3) могло бы служить основой для оценки числа собственных значений оператора $H_N$, как это имело место в методе Бирмана—Швингера [3, 5]. В нашем случае от уравнения (3) необходимо перейти к эквивалентному уравнению с компактным оператором. Этот переход можно осуществить в соответствии с перестройкой уравнений многочастичной теории рассеяния, данной, например, в работах [1, 6]. Не нарушая общности метода, покажем далее перестройку уравнения (3) для задачи трех тел, где $H_N=H_3$, $H_3=H_{30}+\sum\limits_\alpha V_\alpha$; $\alpha=12,\ 13,\ 23$. Введем вектор-функцию $u(\tau_n)$ с компонентами $\{u_\alpha(\tau_n)\}$, которые получены из $\varphi_n(\tau_n)$ отображением $u_\alpha(\tau_n) = \tau_n V_\alpha\varphi_n(\tau_n)$. Тогда уравнение (3) преобразуется к системе вида

$$u(\tau_n) = \mathscr{K}_3(\tau_n, -\Sigma)\,u(\tau_n), \tag{4}$$

и

$$u_\alpha(\tau_n) = \sum_{\alpha\neq\beta}\mathscr{K}_{3\alpha\beta}(\tau_n, -\Sigma)\,u_\beta(\tau_n),\quad \mathscr{K}_{3\alpha\alpha}=0,\quad \mathscr{K}_{3\alpha\beta}(\tau_n, -\Sigma) =$$

$$= -t_\alpha(\tau_n, -\Sigma)R_0(-\Sigma),\quad t_\alpha(\tau_n, -\Sigma) = \tau_n V_\alpha + \tau_n V_\alpha R_0(-\Sigma)\,t_\alpha(\tau_n, -\Sigma).$$

Уравнения (4) при $\tau_n=1$ совпадают с уравнениями, исследованными Фаддеевым в работе [1]. Система (4) может служить для определения числа связанных состояний оператора $H_3$, так как оператор $\mathcal{K}_3(\tau_{n_0}-\Sigma)$ компактен и положительно определен для всех $\tau_n\subset[0, 1]$, если ни одна из подсистем $\alpha$ из двух частиц не имеет ни связанного, ни виртуального уровня. Оператор (4) симметризуем, так как $t_\alpha(\tau_n, -\Sigma)$ имеет представление

$$t_\alpha=\mathcal{T}_\alpha\widetilde{\mathcal{T}}_\alpha,\ \mathcal{T}_\alpha=|t_\alpha(\tau_n, \Sigma)|^{1/2},$$
$$\widetilde{\mathcal{T}}_\alpha=\operatorname{sign}(t_\alpha)\mathcal{T}_\alpha.$$

Отсюда, если определить вектор-функцию $v$ с компонентами $\{v_\alpha\}$, полученными отображением $v_\alpha=\mathcal{T}_\alpha u_\alpha$, то система (4) может быть преобразована к виду

$$v=\widetilde{\mathcal{K}}_3(\tau_n, -\Sigma)v,\ v_\alpha=\sum_{\alpha\neq\beta}\widetilde{\mathcal{K}}_{3\alpha\beta}(\tau_n, -\Sigma)v_\beta, \tag{5}$$

где

$$\widetilde{\mathcal{K}}_{3\alpha\alpha}=0,\quad \widetilde{\mathcal{K}}_{3\alpha\beta}=\mathcal{T}_\alpha(\tau_n, -\Sigma)R_0(-\Sigma)\widetilde{\mathcal{T}}_\beta(\tau_n, -\Sigma)$$

является симметрическим оператором. Отсюда справедливо утверждение: оператор $H_3$ левее точки $-\Sigma$ имеет ровно столько отрицательных собственных значений, сколько собственных значений $\mu(\tau_n)=1$ имеет симметрический компактный положительно определенный оператор $\widetilde{\mathcal{K}}_3$ при $\tau_n\subset[0, 1]$. Следовательно, если выполнено условие

$$\|\widetilde{\mathcal{K}}_3(\tau_n, -\Sigma)\|=1 \quad \text{при} \quad \Sigma=0,\quad \tau_n\subset[0, 1], \tag{6}$$

то оператор $H_3$ имеет непустой дискретный спектр. Более того, если соотношение (6) выполняется при $\tau_n=1$, то в системе трех тел возникает первое связанное состояние при нулевой энергии. Очевидно, если условие (6) выполнено при $\tau_n<1$, то оператор $H_3$ имеет ниже нуля собственные значения, число которых оценивается сверху числом собственных значений оператора $\widetilde{\mathcal{K}}_3$, больших единицы при $\tau_n=1$ и $\Sigma=0$.

3. Аналогичные результаты могут быть получены для системы четырех нерелятивистских частиц, взаимодействие которых двухчастичное и короткодействующее, удовлетворяющее условию, данному в п. 2. Оператор $H_4$ имеет вид

$$H_4=H_{40}+\sum_\alpha V_\alpha,\ \alpha=12,\ 13,\ 14,\ 23,\ 24,\ 14.$$

Предположим, что величина потенциала притяжения $V_\alpha$ такова, что подсистемы любых двух или трех частиц не имеют ни связанных состояний, ни виртуальных уровней. Тогда непрерывный спектр $H_4$ должен быть расположен на полуоси $[0, \infty)$. Вводя однопараметрическое семейство $H_4(\tau)$, где $0\leqslant\tau\leqslant1$, и проводя перестройку уравнения (3) в систему уравнений методом, предложенным в [6, 7], получим для вектор-функции $v$ четырех частиц систему уравнений с компактным симметрическим ядром:

$$v=\widetilde{\mathcal{K}}_4(\tau_{n_1}-\Sigma)v,\ \Sigma=0,$$

где $\widetilde{\mathcal{K}}_4$ — матричный оператор, определенный в [7], для оператора Шрёдингера с двухчастичными потенциалами $(\tau_n, V_\alpha)$, $0\leqslant\tau_n\leqslant1$. Как следует из [7], оператор $\widetilde{\mathcal{K}}_4(\tau_{n_1}-\Sigma)$ при $\Sigma=0$ является положительно определенным и компактным. Следовательно, условия $\|\mathcal{K}_4(\tau_n, -\Sigma)\|=1$, $\Sigma=0$, определяют те операторы $\tau_nV_\alpha$, для которых в системе четырех тел возникает первое связанное состояние, если даже оператор Шрёдингера подсистем двух и трех частиц не имеет ни связанных, ни виртуальных состояний. Отсюда следует отсутствие эффекта Ефимова для четырех тождественных частиц. Случай $N>4$ изучен в [8].

4. Примером квантовой системы, для которой оператор Шрёдингера удовлетворяет условиям, рассмотренным выше, является тринейтрон $3n$ с полным спином $S=3/2$ и орбитальным моментом $L=1$. Проведенный нами анализ на основе условия (6) и прямой численный расчет энергии связанного состояния $3n$ вариационным методом показали возможность существования связанного тринейтрона с нулевой внутренней энергией для ряда известных из литературы фазово-эквивалентных нейтрон-нейтронных потенциалов. Если истинные нейтрон-нейтронные потенциалы таковы, что связанного тринейтрона все же не образуется, то следует ожидать в многочастичных процессах увеличения вероятности образования системы трех нейтронов ($S=3/2$, $L=1$) с относительной нулевой энергией.

Анализ обобщается на случай короткодействующих потенциалов разного знака, если оператор $H(\tau)$ монотонно убывает с ростом $\tau$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Фаддеев Л. Д. В кн.: Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1963, 68. [2] Жислин Г. М. Тр. Моск. матем. общ., 1960, 9, с. 81. [3] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Спектральный анализ. Т. 4. М.: Мир, 1982. [4] Ефимов В. Н. Ядерная физика, 1970, 12, с. 1080. Яфаев Д. Р. Матем. сб., 1974, 94, с. 567. [5] Бирман М. Ш. ДАН СССР, 1959, 29, с. 239. [6] Комаров В. В., Попова А. М. ЭЧАЯ, 1974, 5, с. 1075. [7] Komarov V. V., Popova A. M., Shablov V. L. J. Math. Phys., 1980, 24, p. 854. [8] Komarov V. V., Popova A. M. In: Proc. X European Couf. on Few Body Dynamics. Hungary, 1985, p. 88.

Поступила в редакцию
22.01.85

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1985, Т. 26, № 4

## АТОМНАЯ И ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА

УДК 539.186.3

### ЗАХВАТ ЭЛЕКТРОНА ВОДОРОДОПОДОБНЫМИ И ГЕЛИЕПОДОБНЫМИ ИОНАМИ ЛЕГКИХ ЭЛЕМЕНТОВ

**Ю. А. Шурыгина, А. М. Попова, Я. А. Теплова, Ю. А. Файнберг**

*(НИИЯФ)*

В настоящей работе рассматривается процесс перезарядки быстрых ионов легких элементов с ядерным зарядом $Z=3\div9$ при столкновении с атомами He. Расчеты проведены для случая захвата электрона водородоподобными ионами с образованием гелиеподобных ионов в основном и метастабильных состояниях, а также захвата электрона двухэлектронными ионами с превращением их в литиеподобные.

Сечения захвата электрона вычислены методом прицельного параметра в приближении Бринкмана — Крамерса [1]. Это приближение остается до сих пор самой простой теоретической моделью расчета сечений электронного захвата, в особенности для систем с несколькими электронами. Несмотря на очевидные недостатки, оно по-прежнему широко используется, в частности для определения относительных величин сечений захвата электрона [2], так как качественно верно отражает зависимость сечений от скоростей и зарядов ионов.