ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1985, Т. 26, № 5

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 530.12

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ТЕНЗОРОВ ВТОРОГО РАНГА И МАТРИЦ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

В. И. Денисов

(кафедра квантовой теории и физики высоких энергий)

В ряде задач классической и квантовой теории поля (см., например, [1]) возникает необходимость вычислить произведение нескольких одинаковых матриц четвертого порядка, а также найти его шпур. В теории гравитации аналогичные операции обычно требуется провести с произвольным тензором второго ранга. Непосредственное вычисление этих величин обычным путем, как правило, оказывается чрезвычайно громоздким и не позволяет дать ответ в аналитическом виде при нефиксированном числе сомножителей. Поэтому представляет несомненный интерес поиск взаимосвязи между различными произведениями одинаковых матриц или тензоров.

Рассмотрим некоторый тензор второго ранга в произвольном римановом пространстве-времени, смешанные компоненты которого имеют вид $\varphi^i{}_n(x)$. Так как в определение тензора входит и порядок следования его индексов, то, не ограничивая общности, будем предполагать, что контравариантный индекс i после его опускания должен занимать первое место: $\varphi_{mn}(x)=g_{mi}\varphi^i{}_n(x)$.

Пусть тензор $\varphi_{mn}(x)$ является полностью произвольным, т. е. содержащим одновременно как симметрическую ($\varphi_{(mn)}(x)\neq 0$), так и антисимметрическую ($\varphi_{[mn]}(x)\neq 0$) части. Введем некоторые определения.

N-й степенью тензора $\varphi^i{}_n(x)$ мы будем называть тензор второго ранга $\varphi^{(N)i_1}_{i_{N+1}}(x)$, построенный из N тензоров $\varphi^i{}_n(x)$, все индексы которых последовательно свернуты, за исключением контравариантного индекса у первого тензора и ковариантного индекса у последнего тензора:

$$\varphi^{(N)i_1}_{i_{N+1}}(x)=\underbrace{\varphi^{i_1}_{i_2}(x)\,\varphi^{i_2}_{i_3}(x)\,\ldots\,\varphi^{i_{N-1}}_{i_N}(x)\,\varphi^{i_N}_{i_{N+1}}(x)}_{N}.$$

Сворачивая оставшиеся индексы в этом выражении, получим инвариант-скаляр N-го порядка:

$$I_N(x)=\varphi^{(N)i}_i(x).$$

Вполне очевидно, что любая целочисленная степень симметрического тензора является симметричной. Поэтому инварианты любого порядка этого тензора не будут, вообще говоря, равны нулю. Легко также убедиться, что четные степени антисимметрического тензора симметричны, а нечетные — антисимметричны. Поэтому в случае антисимметрического тензора отличными от нуля инвариантами будут только инварианты четного порядка.

Выясним теперь, являются ли независимыми различные степени некоторого тензора $\varphi^i{}_n(x)$. Так как в теории поля, вообще говоря, используются различные тензоры, без определенной симметрии по отношению к операции подстановки индексов, то все вычисления будем проводить, считая, что тензор $\varphi^i{}_n(x)$ произволен.

Рассмотрим тензор второго ранга.

$$\Phi^i{}_n(x) = E^{prst}E_{klmn}\varphi^i{}_p(x)\varphi^k{}_r(x)\varphi^l{}_s(x)\varphi^m{}_t(x), \tag{1}$$

где $E^{prst}=e^{prst}/\sqrt{-g}$ — плотность единичного абсолютно антисимметрического аксиального тензора, g — определитель метрического тензора риманова пространства-времени ($g<0$), а e^{prst} — символ Леви—Чивиты, причем $e^{0123}=+1$.

Упрощение правой части равенства (1) может быть проведено двумя путями. С одной стороны, согласно [2] имеем

$$E^{prst}E_{klmn} = -\det\begin{Vmatrix} \delta^p_k & \delta^p_l & \delta^p_m & \delta^p_n \\ \delta^r_k & \delta^r_l & \delta^r_m & \delta^r_n \\ \delta^s_k & \delta^s_l & \delta^s_m & \delta^s_n \\ \delta^t_k & \delta^t_l & \delta^t_m & \delta^t_n \end{Vmatrix}. \tag{2}$$

Раскрывая этот определитель и подставляя его в правую часть равенства (1), получим

$$\Phi^i_n = \varphi^i_n(x)\,[(I_1)^3 - 3I_1I_2 + 2I_3] + 6\varphi^{(3)i}_n(x)\,I_1 + \\ + \varphi^{(2)i}_n(x)\,[3I_2 - 3(I_1)^2] - 6\varphi^{(4)i}_n(x). \tag{3}$$

С другой стороны, если рассматривать компоненту тензора $\varphi^i{}_n(x)$ как элемент матрицы, стоящий на пересечении i-й строки и n-го столбца, то мы можем воспользоваться соотношением

$$E^{prst}\varphi^i{}_p(x)\,\varphi^k{}_r(x)\,\varphi^l{}_s(x)\,\varphi^m{}_t(x) = E^{iklm}\det\|\varphi^s{}_n(x)\|.$$

Подставляя его в правую часть равенства (1), найдем, что

$$\Phi^i{}_n(x) = 6\delta^i{}_n\det\|\varphi^s{}_m(x)\|. \tag{4}$$

Таким образом, из выражений (3) и (4) имеем

$$\varphi^{(4)i}_n(x) = -\delta^i_n\det\|\varphi^s_m(x)\| + \varphi^i_n(x)\,[(I_1)^3 - 3I_1I_2 + 2I_3]/6 + \\ + \varphi^{(2)i}_n(x)\,[I_2 - (I_1)^2]/2 + \varphi^{(3)i}_n(x)\,I_1. \tag{5}$$

Сворачивая индексы i и n в этом соотношении, получим

$$24\det\|\varphi^s{}_m(x)\| = [(I_1)^4 + 3(I_2)^2 + 8I_1I_3 - 6I_2(I_1)^2 - 6I_4].$$

Тогда выражение (5) принимает вид

$$\varphi^{(4)i}_n(x) = \varphi^{(3)i}_n(x)\,I_1 + \varphi^{(2)i}_n(x)\,[I_2 - (I_1)^2]/2 + \\ + \varphi^i_n(x)\,[(I_1)^3 - 3I_1I_2 + 2I_3]/6 + \delta^i_n\,[6I_4 + 6(I_1)^2I_2 - (I_1)^4 - 8I_1I_3 - 3(I_2)^2]/24. \tag{6}$$

Если теперь умножать это соотношение последовательно на $\varphi_i{}^m(x)$, $\varphi^{(2)m}_i(x)$ и т. д., учесть равенство $\varphi^{(a)m}_i(x)\,\varphi^{(b)i}_n(x) = \varphi^{(a+b)m}_n(x)$ и само выражение (6), то легко убедиться, что среди бесконечной совокупности целочисленных степеней тензора второго ранга независимыми являются только четыре:

$$\varphi^{(0)i}_n(x) = \delta^i_n,\quad \varphi^{(1)i}_n(x) = \varphi^i_n(x), \\ \varphi^{(2)i}_n(x) = \varphi^i_m(x)\,\varphi^m_n(x),\quad \varphi^{(3)i}_n(x) = \varphi^i_m(x)\,\varphi^{(2)m}_n(x), \tag{7}$$

остальные же могут быть выражены через них и инварианты I_1, I_2, I_3, I_4. Совершенно аналогично можно убедиться, что любой инвариант N-го порядка ($N>4$) может быть выражен через первые четыре независимых инварианта $I_1(x)$, $I_2(x)$, $I_3(x)$, $I_4(x)$.

Таким образом, соотношение (6) позволяет любую целочисленную степень ($N\geqslant 4$) тензора второго ранга представить в виде линейной комбинации из четырех независимых степеней (7). Поэтому любой используемый в теории гравитации бесконечный ряд

$$A^i_n(x)=\sum_{N=0}^{\infty}\frac{a_N}{N!}\varphi^{(N)i}_n(x)$$

из степеней тензора $\varphi^i{}_n(x)$ при практических расчетах с той же степенью общности может быть заменен на линейную комбинацию четырех независимых степеней тензора (7), причем коэффициенты f_0, f_1, f_2, f_3 этой комбинации будут зависеть только от четырех первых инвариантов $I_1(x)$, $I_2(x)$, $I_3(x)$, $I_4(x)$:

$$A^i_n(x)=f_0\varphi^{(0)i}_n(x)+f_1\varphi^{(1)i}_n(x)+f_2\varphi^{(2)i}_n(x)+f_3\varphi^{(3)i}_n(x).$$

Используя полученные соотношения, мы можем построить и другие, более удобные для практических расчетов выражения. Пусть, например, детерминант матрицы, элементами которой являются компоненты тензора $\varphi^i{}_n(x)$, отличен от нуля. Найдем выражение для обратного тензора $\psi^n{}_m(x)$, т. е. тензора, удовлетворяющего соотношению

$$\varphi^i{}_n(x)\psi^n{}_m(x)=\delta^i{}_m.$$

Рассматривая это соотношение как неоднородную систему линейных уравнений относительно шестнадцати неизвестных компонент тензора $\psi^n{}_m(x)$, из формулы Крамера имеем

$$\psi^n{}_m(x)=\mathrm{Adj}\,\|\varphi^n{}_m(x)\|/\det\|\varphi^i{}_k(x)\|, \qquad (8)$$

где $\mathrm{Adj}\,\|\varphi^n{}_m(x)\|$ обозначает алгебраическое дополнение компоненты $\varphi^n{}_m(x)$.

Так как алгебраическое дополнение компонент $\varphi^n{}_m(x)$ можно записать в тензорном виде [3]

$$\mathrm{Adj}\,\|\varphi^n_m(x)\|=\frac{1}{3!}E^{nrst}E_{ikmp}\varphi^i_r(x)\varphi^k_s(x)\varphi^p_t(x),$$

а произведение двух абсолютно антисимметрических аксиальных плотностей $E^{nrst}E_{ikmp}$ выразить через определитель (2), то из соотношения (8) получим

$$\psi^n_m(x)=\{24\varphi^{(3)n}_m(x)-24\varphi^{(2)n}_m(x)I_1+12\varphi^n_m(x)[(I_1)^2-I_2]- \qquad (9)$$
$$-4\delta^n_m[(I_1)^3-3I_1I_2+2I_3]\}[6I_4+6I_2(I_1)^2-8I_1I_3-3(I_2)^2-(I_1)^4]^{-1}.$$

Тензор $\varphi^i{}_n(x)$ мы можем представить и в виде матрицы размерности 4×4, верхний индекс которого нумерует строки, а нижний — ее столбцы. Поэтому все полученные для тензора $\varphi^i{}_n(x)$ соотношения оказываются справедливыми и для произвольной матрицы $\Lambda(x)$ четвертого порядка. Вывод этих соотношений почти дословно повторяет соответствующий вывод для тензора $\varphi^i{}_n(x)$, за тем исключением, что вместо плотности абсолютно антисимметрического аксиального тензора E^{iknm} мы, из-за нетензорной природы матричных индексов, должны использовать абсолютно антисимметрический символ Леви—Чивиты e^{iknm}.

В матричном виде полученные результаты можно записать следующим образом:

$$\det \| \Lambda(x) \| = \frac{1}{24} \{[\mathrm{Sp}\,\Lambda(x)]^4 + 3[\mathrm{Sp}(\Lambda^2(x))]^2 - 6\,\mathrm{Sp}\,\Lambda^4(x) -$$

$$-6[\mathrm{Sp}\,\Lambda(x)]^2\,\mathrm{Sp}(\Lambda^2(x)) + 8\mathrm{Sp}\,\Lambda(x)\cdot\mathrm{Sp}(\Lambda^3(x))\},$$

$$\Lambda^4(x) = \Lambda^3(x)\,\mathrm{Sp}\,\Lambda(x) + \frac{1}{2}\Lambda^2(x)[\mathrm{Sp}\,\Lambda^2(x) - \mathrm{Sp}^2\,\Lambda(x)] +$$

$$+\frac{1}{6}\Lambda(x)[\mathrm{Sp}^3\,\Lambda(x) - 3\mathrm{Sp}\,\Lambda^2(x)\cdot\mathrm{Sp}\,\Lambda(x) + 2\mathrm{Sp}\,\Lambda^3(x)] +$$

$$+I\left[\frac{1}{4}\mathrm{Sp}\,\Lambda^4(x) - \frac{1}{24}\mathrm{Sp}^4\,\Lambda(x) + \frac{1}{4}\mathrm{Sp}^2\,\Lambda(x)\cdot\mathrm{Sp}\,\Lambda^2(x) -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{3}\mathrm{Sp}\,\Lambda^3(x)\,\mathrm{Sp}\,\Lambda(x) - \frac{1}{8}\mathrm{Sp}^2\,\Lambda^2(x)\right],$$

где I — единичная матрица, $\Lambda^N(x) = \underbrace{\Lambda(x)\cdot\Lambda(x)\ldots\Lambda(x)}_{N}$, $\mathrm{Sp}\,\Lambda$ обозначает шпур матрицы $\Lambda(x)$. Если детерминант матрицы $\Lambda(x)$ отличен от нуля, то для обратной матрицы $\Lambda^{-1}(x)$ из соотношения (9) получим следующее выражение:

$$\Lambda^{-1}(x) = \{24\Lambda^3(x) - 24\Lambda^2(x)\,\mathrm{Sp}\,\Lambda(x) + 12\Lambda(x)[\mathrm{Sp}^2\Lambda(x) -$$

$$-\mathrm{Sp}\Lambda^2(x)] - 4I[\mathrm{Sp}^3\Lambda(x) - 3\mathrm{Sp}\Lambda(x)\,\mathrm{Sp}\Lambda^2(x) +$$

$$+2\mathrm{Sp}\Lambda^3(x)]\}[\det \|\Lambda(x)\|]^{-1}.$$

Таким образом, любой бесконечный ряд, построенный из целочисленных степеней произвольной матрицы четвертого порядка

$$f(\Lambda(x)) = \sum_{i=0}^{N} \frac{\lambda_i}{i!}(\Lambda(x))^i,$$

с той же степенью общности также может быть представлен в виде линейной комбинации из четырех матриц $\Lambda^0(x) = \mathrm{I}$, $\Lambda(x)$, $\Lambda^2(x)$ и $\Lambda^3(x)$:

$$f(\Lambda(x)) = A_0 I + A_1\Lambda(x) + A_2\Lambda^2(x) + A_3\Lambda^3(x).$$

В заключение автор выражает глубокую благодарность академику А. А. Логунову за интерес к работе и ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Тимофеевская О. Д., Хрусталев О. А. Курс квантовой механики. М.: Изд-во МГУ, 1978, с. 241. [2] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М.: Наука, 1973, с. 33. [3] Мицкевич Н. В. Физические поля в общей теории относительности. М.: Наука, 1969, с. 11.

Поступила в редакцию
25.09.84