УДК 538.3

О ДВИЖЕНИИ ЭЛЕКТРОНА В ПОЛЕ СТОЯЧЕЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ

А. М. Хапаев, И. В. Пономарев

(кафедра математики)

Одной из характерных для приборов типа мазера на циклотронном резонансе конфигураций полей является суперпозиция стоячей волны и постоянного магнитного поля. Поэтому представляется интересным проанализировать взаимодействие электрона с такого рода полем, локализованным между двумя отражателями (простейший резонатор).

Пусть электрон взаимодействует с полем плоской циркулярно-поляризованной поперечно-однородной стоячей электромагнитной волны с вектор-потенциалом

$$\mathbf{A}=A[\sin\omega\xi+\sin\omega\eta)\mathbf{i}-(\cos\omega\xi+\cos\omega\eta)\mathbf{j}]. \tag{1}$$

Вектор напряженности постоянного магнитного поля $\mathbf{H}_0=H_0\mathbf{k}$ направлен вдоль оси z, $\xi=t-z/c$, $\eta=t+z/c$, c — скорость света, ω — частота, E_0 — амплитуда электрического поля, $A=-cE_0/\omega$. Координаты x и y, а также соответствующие им интегралы движения будем в дальнейшем называть поперечными, а z и t — продольными.

На первом этапе анализа взаимодействия релятивистского электрона с полем ограничимся классическими уравнениями движения как в случае магнитного поля, так и без него. Основой рассмотрения поведения электрона в указанной конфигурации полей на втором этапе будет релятивистское волновое уравнение Клейна — Гордона, дающее более детальную картину взаимодействия и позволяющее в случае, когда энергия сохраняется, получить энергетический спектр бесспиновой частицы в стоячей волне.

Будем исходить из ковариантной формулировки уравнений движения заряда в электромагнитном поле с вектор-потенциалом A_μ:

$$m\ddot{x}_\mu=\frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}-\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}\right)\dot{x}_\nu,$$

где m — масса, e — заряд электрона, а точка означает дифференцирование по собственному времени τ. Следует отметить, что помимо инвариантности потенциала (1) относительно любых поперечных сдвигов, которой отвечают интегралы

$$\dot{x}=\omega_0 y+\frac{e}{mc}A_x+D,\quad \dot{y}=-\omega_0 x+\frac{e}{mc}A_y+S, \tag{2}$$

где $\omega_0=eH_0/mc$, $\mathbf{A}=A_x\mathbf{i}+A_y\mathbf{j}$, рассматриваемая конфигурация полей инвариантна относительно суперпозиции поворота в плоскости (XOY) и соответствующего сдвига по времени. Поэтому имеет место интеграл движения

$$P=\frac{p_\perp^2}{2m}+\frac{\omega_0}{\omega}mc^2\gamma-\frac{e}{mc}(p_xA_x-p_yA_y)+\frac{e^2E_0^2}{m\omega^2}\cos\left(2\frac{\omega z}{c}\right), \tag{3}$$

где $\gamma = dt/d\tau$, $p_\perp^2 = p_x^2 + p_y^2$, $p_\mu = m x_\mu$. С учетом (2) он преобразуется к виду

$$P_1 = \frac{mc^2}{\omega}\gamma + (Dy - Sx) + \frac{1}{2} m\omega_0 (x^2 + y^2). \tag{4}$$

Интеграл (4) независим по отношению к (2) и к интегралу уравнений движения $\dot{x}_\mu \dot{x}_\mu = -c^2$, но является лишь иной формой записи (3). В случае движения частицы в поле волны с фазовой скоростью, зависящей от z, интеграл (4) также имеет место и является зависимым от интеграла, полученного в [1], где он приводится в форме, аналогичной (3). Если бегущая и отраженная компоненты стоячей волны имеют различные амплитуды, то (4) также справедливо, а выражение (3) отличается множителем μ при $\cos(2\omega z/c)$, где μ — коэффициент отражения при компоненте с фазой $t + z/c$.

Таким образом, выражение (4) справедливо для движения частицы в широком классе конфигураций полей, оно помогает установить однозначное соответствие между ростом энергии частицы при наличии циклотронного резонанса и увеличением радиуса ее циклотронной орбиты.

Симметрия полей типа (1) позволяет перейти в уравнениях движения к цилиндрическим координатам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ с выбором оси z, отвечающим условию $D = S = 0$, что возможно при $\omega_0 \neq 0$. В новых переменных получаем систему уравнений, замкнутую относительно r, $\theta = \omega t - \varphi$, z:

$$\begin{cases} \dot{r} = \dfrac{eA}{mc}\left[\sin\left(\theta - \dfrac{\omega}{c}z\right) + \sin\left(\theta + \dfrac{\omega}{c}z\right)\right], \\ \dot{\theta} = \omega_0 - \dfrac{\omega_0\omega^2}{2c^2}r^2 + \dfrac{eA}{mc}\left[\cos\left(\theta - \dfrac{\omega}{c}z\right) + \cos\left(\theta + \dfrac{\omega}{c}z\right)\right] + C, \\ \ddot{z} = -\dfrac{eA\omega\omega_0 r}{m^2c^3}\left[\sin\left(\theta - \dfrac{\omega}{c}z\right) + \sin\left(\theta + \dfrac{\omega}{c}z\right)\right] + \\ \qquad\qquad + 2\dfrac{e^2A^2\omega}{m^2c^3}\sin\left(2\dfrac{\omega}{c}z\right). \end{cases} \tag{5}$$

Заметим, что при $z = n\pi c/\omega$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$, система (5) переходит в полностью интегрируемую систему

$$\begin{cases} \dot{r} = 2\dfrac{eA}{mc}\sin\theta, \\ \dot{\theta} = -\dfrac{\omega_0\omega^2 r^2}{2c^2} + 2\dfrac{eA}{mc}\dfrac{\cos\theta}{r} + E, \end{cases}$$

которой соответствует интеграл

$$\cos\theta = \frac{R}{r} - \frac{Br}{2} + \frac{m\omega^2\omega_0}{16eAc}r^3.$$

Как следует отсюда, движение в плоскости (XOY) финитно, энергия частицы меняется в конечных пределах, и циклотронный резонанс отсутствует. Для параметра $g = r^2$, линейно связанного с энергией, получаем уравнение классических колебаний

$$\left(\frac{dg}{d\tau}\right)^2 + \mathcal{H}(g) = 0$$

с эффективным потенциалом

$$\mathcal{H}(g) = -16\frac{e^2A^2}{m^2c^3}\left[g - \left(R + \frac{Bg}{2} + \frac{m\omega_0\omega^2}{16eAc}g^2\right)^2\right].$$

Среди решений исходной системы (5) существуют такие, для которых $\gamma=\gamma_0=\mathrm{const}$, $r=r_0=\mathrm{const}$, условием чего является $\theta=2\pi n$, откуда следуют алгебраическое уравнение третьей степени для величины радиуса орбиты

$$\frac{\omega^2\omega_0}{2c^2}r_0^3 + Er_0 + 2\frac{eA}{mc} = 0$$

и необходимое соотношение между частотой волны и циклотронной частотой $\omega\gamma_0 = -\omega_0 - 2eA/(mcr_0)$. Параметры C, B, E следующим образом выражаются через начальные условия $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$, $\gamma_0^2 = 1 + (\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2)/c^2$:

$$C = \omega\gamma_0 + \frac{\omega_0\omega^2 r_0^2}{2c^2}, \quad E = C + \omega_0,$$

$$r_0^2 = \frac{1}{\omega_0^2}\left[\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + 4\frac{eA}{mc}(\dot{y}_0\cos\omega t_0 - \dot{x}_0\sin\omega t_0) + 4\frac{e^2A^2}{m^2c^4}\right],$$

$$B = \frac{mc}{2eA}E,$$

а постоянная R определяется из колебательного уравнения для g с учетом

$$\dot{g}(\tau=0) = 4\frac{eA}{mc\omega_0}(\dot{x}_0\cos\omega t_0 + \dot{y}_0\sin\omega t_0).$$

Так как нахождение полных интегралов системы нелинейных дифференциальных уравнений (5) представляет собой достаточно сложную задачу, проанализируем случай, когда $H_0=0$ и продольные компоненты динамического уравнения с учетом (2) имеют вид

$$\ddot{\eta} = 2\frac{e^2A^2}{m^2c^4}\omega\sin\omega(\eta-\xi) + 2\frac{eA}{m^2c^3}\omega(S\cos\omega\xi - D\sin\omega\xi),$$
$$\ddot{\xi} = 2\frac{e^2A^2}{m^2c^4}\omega\sin\omega(\xi-\eta) + 2\frac{eA}{m^2c^3}\omega(S\cos\omega\eta - D\sin\omega\eta). \qquad (6)$$

Далее положим $k_\perp = \sqrt{D^2+S^2}$, $\operatorname{tg}\alpha = D/S$ и введем функцию

$$f(\xi,\eta) = 2\frac{e^2A^2}{m^2c^4}\cos\omega(\eta-\xi) + 2\frac{eA}{m^2c^3}k_\perp[\sin(\omega\xi+\alpha) + \sin(\omega\eta+\alpha)],$$

тогда в канонически сопряженных переменных ξ, $q=\dot{\eta}$ и η, $p=\dot{\xi}$ выражение (6) преобразуется к виду $\dot{q}=\partial H/\partial\xi$, $\dot{p}=\partial H/\partial\eta$, т. е. к гамильтоновой форме с $H=-pq+f(\xi,\eta)$. Наличие слагаемого pq обусловлено видом функции $\dot{z}^2-c^2\dot{t}^2$, играющей роль кинетической энергии. Соответствующий оператор $\hat{H}$ не является знакоопределенным и не совпадает с оператором энергии.

В заключение классического анализа взаимодействия рассмотрим случай движения частицы в поле (1) при $k_\perp=0$, когда $f=2\varepsilon^2\cos 2\bar{z}$, где $\bar{z}=\omega z/c$ и $\varepsilon=eA/(mc^2)$. Для $\bar{z}$ получим уравнение $\dot{\bar{z}}^2=q\cos 2\bar{z}+a$. Здесь $q=2\varepsilon^2$, $a=1-\gamma_0^2-q$. Из анализа его решения в форме [2] следует, что движение частицы может быть финитным по z (при $|a|<q$) или инфинитным ($|a|>q$) — соответственно фазовые кривые I

и *II* на рис. 1. Кривая *III* отвечает солитонному решению уравнений движения $\bar{z}=2\,\mathrm{arc\,tg}\exp[\sqrt{\sigma}(\tau-\tau_0)]$ при $|a|=|q|$, $k=1$, характеризующемуся апериодичностью зависимости $\dot{\bar{z}}(\tau)$.

В приближении, не учитывающем спиновые эффекты, квантовомеханическое рассмотрение взаимодействия электрона с полем стоячей волны в релятивистском случае будем основывать на волновом уравнении

$$\hat{G}\psi=0,\ \hat{G}=\left(-i\hbar\partial_\mu-\frac{e}{c}A_\mu\right)^2+m^2c^2.$$

Операторы обобщенного поперечного импульса $p_x=-i\hbar\partial_x$, $p_y=-i\hbar\partial_y$ коммутируют с $\hat{G}$, поэтому решение будем искать в виде $\psi(x, y, z, t)=\exp[i(xk_x+yk_y)]\bar{\psi}(z, t)$. Для $\bar{\varphi}$ имеет место уравнение

$$\bar{\varphi}_{zz}-\frac{1}{c^2}\bar{\varphi}_{tt}=F(k_\perp,\ z,\ t), \tag{7}$$

где $F=\left(\mathbf{k}_\perp+\frac{e}{c\hbar}\mathbf{A}\right)^2+\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2$. Получение точного решения (7) в общем виде затруднительно, поэтому, как и при классическом подходе, рассмотрим случай $k_\perp=0$, когда $F=m^2c^2(1+e^2A^2/(m^2c^4))/\hbar^2$, $\mathbf{A}^2=2A^2(1-\cos 2z)$, т. е. $[\hat{G}, \partial/\partial t]=0$, что позволяет искать решение (7) в форме $\bar{\varphi}(z)=\exp(imc^2\gamma t/\hbar)\varphi(\bar{z})$. Уравнение для $\varphi(\bar{z})$ приобретает вид

$$\varphi''+(\bar{a}+2\bar{q}\cos 2\bar{z})\varphi=0,\ \bar{a}=\left(\frac{mc^2}{\hbar\omega}\right)^2 a,\ \bar{q}=\left(\frac{mc^2}{\hbar\omega}\right)^2 q.$$

Таким образом, зависящая от z часть волновой функции скалярной релятивистской частицы в поле стоячей волны есть решение уравнения Матье [3], т. е. функция Флоке $F_\nu(\bar{z})$ или $F_\nu(-\bar{z})$ (при ν не целом). Ее энергетический спектр, т. е. определяемый из граничных условий на φ набор допустимых значений параметра $\bar{a}$, существенно зависит от постановки рассматриваемой задачи.

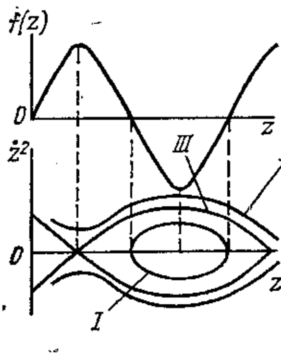

Рис. 1

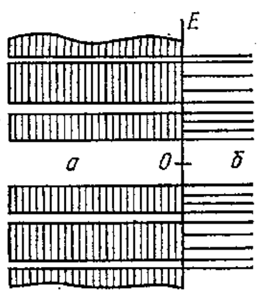

Рис. 2

Дискретный спектр. Пусть доступная для частицы область ограничена n полупериодами стоячей волны. Граничное условие при этом имеет вид $\varphi(0)=\varphi(n\pi)=0$. Учитывая свойство решений Флоке $F_\nu(\bar{z})=\exp(i\nu\bar{z}),u_\nu(\bar{z})$, $u_\nu(\bar{z}+\pi)=u_\nu(\bar{z})$, получаем набор допустимых $\nu=2k/n$, где k — целое. В частности, если частица движется в области, отвечающей одному периоду стоячей волны, в фундаментальной совокупности решений нашей граничной задачи присутствуют функции Матье $ce_r(\bar{z}, \bar{q})$, $se_r(\bar{z}, \bar{q})$, при этом $a=a_r$. Для малых $\bar{q}$ имеем

$$a_0=-\bar{q}^2/2+O(\bar{q}^4),\quad a_1=b_1(-\bar{q})=1+\bar{q}-\bar{q}^2/8+O(\bar{q}^3),$$
$$a_2=4+5\bar{q}^2/12+O(\bar{q}^3),\quad b_2=4-\bar{q}^2/12+O(\bar{q}^3),$$
$$a_r,\ b_r=r^2+\bar{q}^2/2(r^2-1)+O(\bar{q}^3),\quad r\geqslant 3.$$

Непрерывный спектр. Если $n \to \infty$, т. е область стоячей волны не ограничена по z, то условие на φ имеет вид $|\varphi| < \infty$. С другой стороны, из свойств функций Флоке следует, что ν действительно лишь в случае $a_0 \leqslant \bar{a} \leqslant b_1$, $a_1 \leqslant \bar{a} \leqslant b_2$ (при $\bar{q} > 0$). Поэтому спектр энергий имеет зонную структуру, причем ширина запрещенных зон уменьшается с ростом их порядкового номера. Качественный вид спектра показан на рис. 2, *а*. Линии на рис. 2, *б* соответствуют дискретному спектру.

В случае, если границы области стоячей волны проницаемы для частицы, все предыдущие ограничения на волновую функцию снимаются и спектр оказывается полностью непрерывным.

Остается добавить, что дисперсионное соотношение во всех случаях одинаково и имеет вид

$$a = \nu^2 + \bar{q}^2 / 2(\nu^2 - 1) + O(\bar{q}^4), \quad \nu \geqslant 3,$$

а спектр энергий симметричен относительно нулевого уровня и $|E| \geqslant mc^2 + O(A^2)$.

Решения классических и квантовых уравнений в поле типа (1), построенные с учетом граничных условий, могут служить основой для вычисления вероятностей спонтанного и вынужденного излучений, а также для расчета параметров источников индуцированного излучения.

В заключение авторы выражают благодарность И. М. Тернову и В. Р. Халилову за полезные обсуждения и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Андреев Ю. А., Давыдовский В. Я., Даниленко В. Н. ЖТФ, 1976, 46, с. 2380. [2] Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. М.: Наука, 1968. [3] Мак-Лахлан Н. Теория и приложения функций Матье. М.: ИЛ, 1953, с. 14.

Поступила в редакцию
29.10.84

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1985, Т. 26, № 5

УДК 574.872

СПЕКТРАЛЬНОЕ И УГЛОВОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ КОГЕРЕНТНОГО СИНХРОТРОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Н. П. Клепиков, А. К. Ященко

(кафедра теоретической физики)

Совместное излучение группы электронов, движущихся в магнитном поле, давно было предметом теоретических исследований [1—4], однако поскольку частицы предполагались движущимися по одной и той же окружности, был сделан вывод о том, что излучение частиц может быть когерентным только на тех достаточно низких частотах, для которых расстояния между частицами сгустка имеют порядок длины волны. Достигнуть же большой плотности частиц в сгустке трудно. Опираясь на недавно построенную общую теорию [5] излучения систем релятивистских частиц, мы покажем, что существуют и другие, легче достигаемые возможности для генерации когерентного синхротронного излучения на достаточно высоких частотах.

Гармоники векторного потенциала, который создается системой N частиц с зарядами e_a, движущихся по замкнутым орбитам с одинаковой частотой ω_0, в момент t в точке, находящейся на расстоянии $\mathcal{R}$ от системы в направлении единичного вектора $\mathbf{n}$, имеют вид