Acad. Sci. USA, 1983, **86**, p. 983. [13] Мусил Я., Новакова О., Кунц К. Современная биохимия в схемах. М.: Мир, 1981. [14] Joliot P., Joliot A. Biochem. et Biophys. Acta, 1973, 583, p. 302. [15] Ziem-Hanck U., Heber U. Ibid., 1980, **591**, p. 266.

Поступила в редакцию
12.11.84

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1985, Т. 26, № 5

АСТРОНОМИЯ

УДК 528.21/22

# О НЕКОТОРЫХ ВОЗМОЖНОСТЯХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛА ПРИТЯЖЕНИЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО ТЕЛА РЯДОМ, СХОДЯЩИМСЯ ВСЮДУ ВНЕ ЕГО ПОВЕРХНОСТИ

**Н. А. Чуйкова**

*(ГАИШ)*

При обработке спутниковых и наземных гравиметрических данных обычно встает вопрос о возможности применимости единого ряда Лапласа для представления потенциала и его производных, ибо сходимость этого ряда всюду вне поверхности планеты доказана лишь для некоторого класса поверхностей [1]. Для произвольного вида поверхности тела эту задачу позволяет решить теорема Рунге — Крарупа, утверждающая, что любую гармоническую вне поверхности $\sigma$ функцию $\varphi \in H_\varphi$ можно равномерно приблизить с помощью последовательности функций $\psi_j \in H_\psi$, гармонических вне произвольной внутренней к $\sigma$ сферы, или же с помощью частных сумм рядов Лапласа для $\{\psi_j\}$ [2]:

$$\varphi = \lim_{j\to\infty} \psi_j = \lim_{j\to\infty} S_{n_j} = \lim_{j\to\infty} \sum_{k=0}^{n_j} A_k^{(j)} Y_k, \tag{1}$$

где $Y_k$ — шаровая функция. Однако в этом случае встает вопрос о единственности такого представления и о том, насколько отличаются между собой коэффициенты $A^{(j)}_k$ каждого последующего приближения (т. е. вопрос о непрерывности функционала $A^{(j)}_k(\varphi)$ в пространствах $H_\varphi$, $H_\psi$, $H_s$).

Система шаровых функций $\{Y_k\}$ в пространстве $H_\varphi$ представляет собой базис в широком смысле (полная усиленно линейно независимая (у. л. н.) система функций, биоортогональная которой система линейных функционалов $\{A_k\}$ обладает свойством единственности). Ее полнота (совпадение замкнутой линейной оболочки $\{Y_k\}$ с $H_\varphi$) следует из теоремы Рунге—Крарупа, у. л. н.

$$\left(\lim_{j\to\infty} \sum_{k=0}^{n_j} A_k^{(j)} Y_k = 0 \Rightarrow \lim_{j\to\infty} A_k^{(j)} = 0\right)$$

обусловлена наличием биоортогональной ей системы линейных функционалов $\{A_k$ — стоксовы постоянные$\}$, обладающей свойством единственности ($A_k(\varphi) = 0 \Rightarrow \varphi = 0$) в силу теоремы единственности. Из условия у. л. н. $\{Y_k\}$ следует, что существуют пределы $\lim\limits_{j\to\infty} A_k^{(j)} = A_k(\varphi)$ — непрерывные в $H_\varphi$ функционалы, не зависящие от выбора $\{\psi_j\}$, $\{S_{n_j}\}$ [3, с. 577; 4, с. 135].

Поскольку $\{Y_k\}$ — базис в широком смысле, то каждому $\varphi$ можно сопоставить его разложение по элементам $\{Y_k\}$: $\varphi \sim \sum_{k=0}^{\infty} A_k(\varphi) Y_k$. Это разложение может быть либо: $A$) сходиться к $\varphi$; $B$) обладать подпоследовательностью частичных сумм, сходящейся к $\varphi$ (сверхсходимость); $C$) расходиться и не иметь ни одной сходящейся подпоследовательности частичных сумм. Лишь в случае пустоты классов $B$ и $C$ представление (1) всегда единственно, $S_{n_j} = S_n = \sum_{k=0}^{n} A_k Y_k$ — частные суммы ряда Лапласа для $\varphi$ и коэффициенты $A_k$ ($k=0 \div n-1$) каждого последующего приближения $S_n$ совпадают с коэффициентами предыдущего $S_{n-1}$. Система $\{Y_k\}$ в этом случае называется базисом в узком смысле. В случае принадлежности $\varphi$ к классу $C$ ее всегда можно представить в виде суммы двух функций класса $B$ (представление *не единственно*) [3, с. 579; 4, с. 141]:

$$\varphi = \varphi' + \varphi'' = \lim_{j\to\infty} \left( \sum_{k=0}^{n_j'} A_k(\varphi') Y_k + \sum_{k=0}^{n_j''} A_k(\varphi'') Y_k \right), \tag{2}$$

где $\{n_j'\}$, $\{n_j''\}$ — две возрастающие подпоследовательности натуральных чисел.

Конкретный вид представления (2) для потенциала произвольного тела, ограниченного однозначной поверхностью, можно найти, используя для обратного расстояния ряд, полученный на основе разложения Миттаг-Лефлера [3, с. 499] для аналитической функции в прямолинейной звезде элемента $r'/r = 0$:

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r\sqrt{1 - 2\frac{r'}{r}\cos\gamma + \left(\frac{r'}{r}\right)^2}} = \frac{1}{r}\lim_{j\to\infty} \left( \sum_{\kappa=0}^{n_{2j}} \theta_k P_k(\cos\gamma) \left(\frac{r'}{r}\right)^k + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{n_{2j-1}} (1-\theta_k) P_k(\cos\gamma) \left(\frac{r'}{r}\right)^k \right) = \frac{1}{r}\lim_{j\to\infty} \sum_{k=0}^{n_{2j}} \theta_k' P_k(\cos\gamma) \left(\frac{r'}{r}\right)^k. \tag{3}$$

Здесь $n_j$ — произвольная возрастающая последовательность натуральных чисел, удовлетворяющая условию $n_{j+1}/n_j \to \infty$ (например, $n_j = \langle j^{\alpha j} \rangle$, где $\alpha > \varepsilon > 0$), $\theta_k$ — последовательность действительных чисел, подчиненных условию

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|\theta_k|} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt{|1-\theta_k|} = 1, \quad \theta_k' = 1$$

при $k \leqslant n_{2j-1}$, $\theta_k' = \theta_k$ при $n_{2j-1} + 1 \leqslant k \leqslant n_{2j}$.

Коэффициенты $\theta_k$ можно вычислить по следующей формуле, универсальной для любой аналитичной функции [3, с. 504]:

$$\theta_k \cong \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(c\ln(2\ \ +1))^k} \sum_{q=k}^{2i} \frac{E_q^{(k)}}{q!} \left(1 - \frac{1}{(2i+1)^c}\right)^q - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{(c\ln 2i)^k} \sum_{q=k}^{2i-1} \frac{E_q^{(k)}}{q!} \left(1 - \frac{1}{(2i)^c}\right)^q \right\}, \tag{4}$$

где $0<c<1$, $(-1)^{q+k}E^{(k)}_q$ — числа Стирлинга I рода, определяются из рекуррентных соотношений

$$E_q^{(k)}=E_{q-1}^{(k-1)}+(q-1)\,E_{q-1}^{(k)};\ E_q^{(q)}=1;\ E_q^{(0)}=0.$$

Подставляя (3) в формулу для потенциала тела $M$, получим

$$V(r,\ \varphi,\ \lambda)=f\int\limits_M\frac{dm}{\Delta}=\lim_{j\to\infty}S_{n_{2j}}=\lim_{j\to\infty}f\sum_{k=0}^{n_{2j}}\theta_k'\sum_{m=0}^{k}\frac{P_{km}(\sin\varphi)}{r^{k+1}}\times$$
$$\times\,(A_{km}\cos m\lambda+B_{km}\sin m\lambda),\qquad(5)$$

где $A_{km}$, $B_{km}$ — стоксовы постоянные. Видно, что коэффициенты каждого приближения $S_{n_{2j}}$ совпадают со стоксовыми, за исключением $k=n_{2j-1}+1\div n_{2j}$. Каждое приближение отличается от предыдущего $S_{n_{2j-1}}$ не только добавлением новых членов с $k=n_{2j-1}+1\div n_{2j}$, но и исчезновением множителей $\theta_k$ при $k=n_{2j-2}+1\div n_{2j-1}$. Характер приближения и степень его отличия от лапласовского задаются, как видно из (3) и (4), двумя произвольными параметрами: $\alpha>\varepsilon>0$ и $0<c<1$.

Для иллюстрации в табл. 1 приведены значения $\{n_j\}$ для различ-

Таблица 1

| $j$ | $n_{2j-1}/n_{2j}$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $\alpha=1$ | $\alpha=1/2$ | $\alpha=1/3$ | $\alpha=1/4$ | $\alpha=1/10$ |
| 1 | 1/4 | 1/2 | 1/1 | 1/1 | 1/1 |
| 2 | 27/256 | 5/16 | 3/6 | 2/4 | 1/2 |
| 3 | $5^5/6^6$ | 55/216 | 8/36 | 7/14 | 2/3 |
| 4 | $7^7/8^8$ | $\sqrt{\ldots}$ | $\sqrt[3]{\ldots}$ | $\sqrt[4]{\ldots}$ | 4/5 |
| 5 | $9^9/10^{10}$ | $\sqrt{\ldots}$ | $\sqrt[3]{\ldots}$ | $\sqrt[4]{\ldots}$ | 7/10 |

ных $j$ и $\alpha$. Видно, что чем меньше $\alpha$, тем меньше первые приближения отличаются от лапласовских, однако при увеличении номера приближения число отличных от стоксовых коэффициентов увеличивается как $\sim(2j)^{2\alpha j}$. Величина же их отличия от стоксовых зависит от $c$. Например, при $c=0{,}1$ $\theta_2=0{,}45$, $\theta_3=0{,}025$; при $c=0{,}9$ $\theta_2=0{,}025$, $\theta_3=0{,}021$.

Таким образом, при обработке наблюдений для получения следующего приближения к реальному потенциалу нужно не просто прибавлять новые члены разложения большей степени $n$, но и изменять последние коэффициенты предыдущего приближения, число которых определяется величиной $\alpha$ и зависит от области наблюдения. Так, на основе [5] можно сделать вывод, что для представления $V$ вблизи поверхности планет земной группы $\alpha$ можно взять довольно малым ($\leqslant 0{,}01$), ибо до достаточно больших $n$ (300 — для Земли, 200 — для Луны, 70 — для Марса) частные суммы ряда Лапласа представляют собой сходящуюся к $V$ последовательность (но, возможно, не наилучшего приближения).

Как мы уже отметили, представление (5) не единственно. Используя другой вид разложения Миттаг-Лефлера [3, с. 499] для обратного расстояния

$$\frac{1}{\Delta}=\frac{1}{r}\lim_{j\to\infty}\sum_{k=0}^{j}C_k^{(j)}P_k(\cos\gamma)\left(\frac{r'}{r}\right)^k,$$

где

$$C_k^{(j)}\underset{j\to\infty}{\to}\frac{k!}{(c\ln(j+1))^k}\sum_{q=k}^{j}\frac{E_q^{(k)}}{q!}\left(1-\frac{1}{(j+1)^c}\right)^q, \tag{6}$$

можно получить следующее выражение для потенциала:

$$V(r,\ \varphi,\ \lambda)=\lim_{j\to\infty}S_j=\lim_{j\to\infty}f\sum_{k=0}^{j}C_k^{(j)}\sum_{m=0}^{k}\frac{P_{km}(\sin\varphi)}{r^{k+1}}\times$$

$$\times(A_{km}\cos m\lambda+B_{km}\sin m\lambda). \tag{7}$$

В этом случае все коэффициенты каждого следующего приближения отличаются от коэффициентов предыдущего и от стоксовых постоянных на множители $C^{(j)}{}_k$, характер изменения которых в зависимости от $c$ и $j$ можно определить из табл. 2.

Таблица 2

| $j, k$ | $c_k^j$ | |
|---|---|---|
| | $c=0{,}1$ | $c=0{,}9$ |
| 1,1 | 0,966 | 0,744 |
| 2,1 | 0,996 | 0,835 |
| 2,2 | 0,897 | 0,403 |
| 3,1 | 0,999 | 0,872 |
| 3,2 | 0,887 | 0,559 |
| 3,3 | 0,814 | 0,186 |
| 4,1 | 0,999 | 0,892 |
| 4,2 | 0,997 | 0,642 |
| 4,3 | 0,964 | 0,260 |
| 4,4 | 0,728 | 0,078 |

Видно, что действительно коэффициенты $C^{(j)}{}_k\to 1$ (снизу) при возрастании $j$, т. е. коэффициенты ряда (7) стремятся к стоксовым. Однако для первых приближений и для последних коэффициентов каждого приближения отличие их от стоксовых довольно значительно и зависит от выбора $c$. Поскольку

$$c=H_j/\sqrt{\ln(j+1)},$$

где $H_j$ — области, приближающие область аналитичности $V$, то чем ближе к поверхности планеты мы находимся и чем меньше порядок приближения $j$, тем большее $c$ нужно брать для достижения той же меры приближения $\delta_1$, что и в более дальней зоне, ибо $\delta\sim H$, $1/j$ [3, с. 499].

Таким образом, можно сделать следующие общие выводы.

1. Потенциал планеты (а следовательно, в силу теоремы Вейерштрасса о равномерно сходящихся последовательностях аналитических функций, и произвольную производную потенциала) можно равномерно представить всюду в области его аналитичности в виде предела сумм шаровых функций вида (5), (7).

2. Это представление не единственно.

3. Коэффициенты при шаровых функциях хотя и стремятся при увеличении порядка приближения к стоксовым постоянным (снизу), однако значительно зависят от номера приближения и от области наблюдений (см. табл. 1, 2).

4. Поскольку в спутниковой области именно ряд Лапласа дает наилучшее квадратичное приближение к потенциалу, то при обработке только спутниковых данных мы не сможем получить универсальную модель (5) или (7), т. е. не можем использовать спутниковую модель на поверхности, не подчиняющейся условиям сходимости на ней ряда Лапласа.

5. Для получения универсальной модели (5), (7) нужно использовать или совместные с наземными, или только наземные наблюдения, причем вид и коэффициенты модели сильно зависят от того, к какой сглаженной земной поверхности отнесены наземные наблюдения (т. е. нельзя увеличивать детальность представления поля притяжения только путем увеличения количества членов представления).

6. Среди всех представлений типа (5), (7) для каждой области наблюдений существует последовательность сумм наилучшего приближения (среднеквадратичного и равномерного), определяемая выбором параметров $c$ и $\alpha$. Очевидно, их можно найти только из обработки наблюдений, и они дают наилучшее приближение только в области наблюдения.

Заметим также, что можно отказаться от поисков наилучшего представления $V$ среди рядов по шаровым функциям. Так, например, полученное нами разложение потенциала эллипсоида произвольного сжатия в ряд по гипергеометрическим функциям (вместо $1/r^n$) [6] оказывается не только сходящимся там, где ряд Лапласа расходится, но и более быстро сходящимся в некоторой части области, где сходится и ряд Лапласа. Если разложить гипергеометрические функции в степенные ряды и представить полученный в [6] ряд в виде предела сумм шаровых функций, то окажется, что мы получим представление типа (5); $c$ и $\alpha$ при этом определяются сжатием эллипсоида.

Конечно, если определить базисную систему функций, ортогональных по области наблюдений, и по ней вести разложение, то задачу наилучшего представления $V$ можно решить единственным образом.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Чуйкова Н. А. Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон., 1983, 25, № 1, с. 22. [2] Мориц Г. Современная физическая геодезия. М.: Недра, 1983. [3] Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. Т. 2. М.: Наука, 1968. [4] Маркушевич А. И. Избранные главы теории аналитических функций. М.: Наука, 1976. [5] Антонов В. А., Холшевников К. В. Астрон. журн., 1982, 59, № 4, с. 763. [6] Чуйкова Н. А. В кн.: Изучение Земли как планеты методами астрономии, геодезии и геофизики. Киев: Наукова думка, 1982.

Поступила в редакцию
10.10.84

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1985, Т. 26, № 5

ФИЗИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 534.222

# ВЛИЯНИЕ ВНЕШНИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ НА АКУСТОЭЛЕКТРОННОЕ ЗАПОМИНАНИЕ В СТРУКТУРЕ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИК—ПОЛУПРОВОДНИК

**И. Ю. Солодов, Г. Ю. Тимофеева**

*(кафедра акустики)*

Акустоэлектронное последействие в слоистой структуре пьезоэлектрик—полупроводник интенсивно изучается в последние годы и применяется для обработки аналоговой информации [1, 2]. Суть эффекта заключается в том, что в результате нелинейного взаимодействия встречных поверхностных акустических волн возникает постоянное во времени электрическое поле, под действием которого изменяется заряд в приповерхностной области полупроводника, причем часть его захватывается поверхностными состояниями. Считывание запомненного на ловуш-