ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1985, Т. 26, № 6

УДК 519.242

ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ИЗМЕРЕНИЯ ГАУССОВСКОГО СИГНАЛА

П. В. Голубцов, Ю. П. Пытьев, А. И. Чуличков

(кафедра математики)

При экспериментальных исследованиях, как правило, доступные для измерения величины лишь косвенно связаны с параметрами объекта. В случае заданной линейной схемы измерений этих параметров вопрос о редукции экспериментальных данных к виду, какой они имели бы при измерениях объекта с помощью приборов, близких к идеальным, рассмотрен в работе [1]. В настоящей работе исследуются вопросы, связанные с уточнением значений конечного набора параметров объекта по их косвенным измерениям в случае, когда известны априорные распределения этих параметров и ошибок измерений. В частности, найдено апостериорное распределение измеряемых параметров объекта и решены задачи планирования измерений для наилучшего уточнения.

1°. Пусть случайный гауссовский вектор f евклидова пространства $\mathscr{R}$ размерности N, определяющий параметры объекта, измеряется согласно схеме

$$\xi=Af+\nu, \tag{1}$$

где вектор ξ из евклидова пространства $\widetilde{\mathscr{R}}$ размерности n представляет собой измерение вектора $Af\in\widetilde{\mathscr{R}}$, сопровождающееся ошибкой $\nu\in\widetilde{\mathscr{R}}$. Случайный вектор ν контролируется нормальным распределением $\mathscr{N}(0, \Sigma)$; $A\in(\mathscr{R}\to\widetilde{\mathscr{R}})$ — заданный линейный оператор, действующий из пространства $\mathscr{R}$ в $\widetilde{\mathscr{R}}$ и моделирующий измерительный прибор.

Теорема 1. Пусть случайные векторы f и ν независимы и контролируются соответственно нормальными распределениями $\mathscr{N}(f_0, F)$ и $\mathscr{N}(0, \Sigma)$. Тогда условное распределение вектора f при условии, что в результате измерений по схеме (1) получен вектор ξ, является нормальным $\mathscr{N}(f_\xi, F_\xi)$, где

$$f_\xi=f_0+FA^*(AFA^*+\Sigma)^-(\xi-Af_0),\quad F_\xi=F-F(AFA^*+\Sigma)^-AF.$$

B^- обозначает оператор, псевдообратный к B [2]*.

Заметим, что условное математическое ожидание $f_\xi=E(f|\xi)$ линейно зависит от результатов эксперимента (1) и, как известно, является наилучшей в среднем квадратичном (с. к.) оценкой вектора f по измерениям ξ, т. е. $E\|f-f_\xi\|^2=\inf\|f-\varphi(\xi)\|^2$, где inf берется по классу всех борелевских функций $\varphi(x)$, $x\in\widetilde{\mathscr{R}}$ [3].

Для любого ортонормированного базиса $(e_1, e_2, \ldots, e_N)\subset\mathscr{R}$

$$E\|f-f_\xi\|^2=E(E(\|f-f_\xi\|^2|\xi))=E\left(E\left(\sum_{\mu=1}^{N}(f-f_\xi, e_\mu)^2|\xi\right)\right)=$$

$$=E\left(\sum_{\mu=1}^{N}(e_\mu, F_\xi e_\mu)\right)\equiv E\,\mathrm{Tr}\,F_\xi\equiv E\,\|F_\xi^{1/2}\|_2^2=\|F_\xi^{1/2}\|_2^2. \tag{2}$$

В последнем равенстве учтено, что условный корреляционный оператор F_ξ не зависит от ξ. Если условное среднее f_ξ вектора f использо-

---

* В случае, когда B имеет обратный, $B^-=B^{-1}$.

вать как оценку f, то величина $\|F_\xi^{1/2}\|_2$ определит сопутствующую погрешность. Чем меньше $\|F_\xi^{1/2}\|_2$, тем точнее f_ξ в с. к. приближает f.

Если не учитывать измерение ξ, то оценкой f, наилучшей в с. к., является среднее f_0, а сопутствующая погрешность равна $\|F^{1/2}\|_2$. Согласно теореме 1, $F \geqslant F_\xi$ и, как следствие, $\|F^{1/2}\|_2 \geqslant \|F_\xi^{1/2}\|_2$. Это означает, что в любом случае f_ξ является в с. к. более точной версией, чем f, независимо от величины погрешности ν и прибора A в схеме (1).

2°. Рассмотрим вопрос о том, как следует проводить уточняющий эксперимент (1), в частности как следует выбирать оператор A для наилучшего уточнения вектора f. Выбирая в качестве критерия погрешность $(E\|f-f_\xi\|^2)^{1/2} = \|F_\xi^{1/2}\|_2$, сопутствующую схеме измерения (1), приходим к вариационной задаче

$$\inf\{\|F_\xi^{1/2}\|_2^2 \mid A \in \mathscr{A} \subset (\mathscr{R} \to \widetilde{\mathscr{R}})\}, \tag{3}$$

где $\mathscr{A}$ — некоторое допустимое подмножество линейных операторов, действующих из $\mathscr{R}$ в $\widetilde{\mathscr{R}}$, выражающее возможности экспериментальных методов измерений. Приведем решение задачи (3) для некоторых конкретных моделей измерений.

3°. Пусть исследуемый объект характеризуется набором параметров $f_1, ..., f_N$ и принадлежит множеству объектов, о которых известно, что значения параметров $f_1, ..., f_N$ от объекта к объекту меняются случайным образом. Параметры $f_1, ..., f_N$ рассматриваются как случайный вектор $f \in \mathscr{R}$, контролируемый нормальным распределением $\mathscr{N}(f_0, F)$ с известным математическим ожиданием и невырожденным корреляционным оператором F. Исследователя интересуют значения случайного вектора f для конкретного объекта, и для уточнения этих значений он имеет возможность прямого и безошибочного измерения не более чем n параметров $(n < N)$. Задача состоит в выборе тех параметров, которые позволяют уточнить вектор f наилучшим образом. Заметим, что при наличии корреляционных связей между параметрами $f_1, ..., f_N$ измерение какого-либо одного параметра приводит к уточнению и других параметров. Рассматриваемая задача имеет целью оптимизацию выбора измеряемых параметров с учетом их корреляции.

Итак, речь идет о выборе $n \leqslant N$ координат случайного вектора f в фиксированном базисе $(g_1, ..., g_N) \subset \mathscr{R}$ так, чтобы их безошибочное измерение наилучшим образом уточняло f. Пусть в (1) $\nu = 0$ с вероятностью единица и A — оператор проектирования в $\widetilde{\mathscr{R}} = \mathscr{R}$ на линейную оболочку, натянутую на $m \leqslant n$ векторов базиса $g_{\mu_1}, \ldots, g_{\mu_m}$. В задаче (3) следует выбрать линейную оболочку $\mathscr{L}(g_{\mu_1}, \ldots, g_{\mu_m})$, при проектировании на которую условный корреляционный оператор F_ξ имеет наименьший след.

Матрица оператора A в базисе $(g_1, ..., g_N)$ диагональна: $A = \operatorname{diag}(\delta_1, ..., \delta_N)$, где $\delta_\mu = 1$, если $g_\mu \in \mathscr{L}(g_{\mu_1}, \ldots, g_{\mu_m})$, и $\delta_\mu = 0$ в противном случае, $\mu = 1, ..., N$. Перенумеруем векторы базиса $g_1, ..., g_N$ так, чтобы первыми стояли векторы $g_{\mu_1}, \ldots, g_{\mu_m}$, а затем — остальные векторы базиса. В новом базисе $A = \operatorname{diag}(1, ..., 1, 0, ..., 0)$, а матрицу корреляционного оператора F вектора f запишем в блочном виде:

$$F = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix},$$

где F_{11} — матрица размера $m \times m$. Матрица условного корреляционного оператора F_ξ, согласно теореме 1, имеет вид

$$F_\xi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix},$$

где $G = F_{22} - F_{21}F_{11}^{-1}F_{12}$. При переходе к другой линейной оболочке и соответственно к другому базису переставляются элементы матрицы F и, следовательно, изменяются матрицы F_{11}, F_{12}, F_{21}, F_{22}. Итак, *задача сводится к такому упорядочению базиса $g_1, \ldots, g_N$, при котором достигается минимум функционала* $\|F_\xi^{1/2}\|_2^2 = \mathrm{Tr}\, F_{22} - \mathrm{Tr}\, F_{21}F_{11}^{-1}F_{12}$. При безошибочном измерении первых n координат f в этом базисе будет получено наиболее точное приближение f_ξ вектора f^*.

В частности, если есть возможность измерять лишь одну координату $f_i = (g_i, f)$ вектора f, то номер i должен выбираться из условия $\min\limits_i \left\{\sum\limits_{k=1}^{N} (Df_k - (\mathrm{cov}(f_i, f_k))^2/Df_i)\right\}$, эквивалентного условию $\max\limits_i \left\{\sum\limits_{k=1}^{N} \times \right.$ $\left.\times (\mathrm{cov}(f_i, f_k))^2/Df_i\right\}$, где Df_i — дисперсия i-й координаты вектора f, а $\mathrm{cov}(f_i, f_k)$ — ковариация i-й и k-й координат. Если $f_1, \ldots, f_N$ не коррелированы, то, очевидно, следует выбирать «наименее точную» координату.

4°. Пусть, как и в предыдущем пункте, безошибочно измеряются параметры $f_1, \ldots, f_N$ объекта, однако помимо измерения отдельных координат возможно измерение и произвольных их линейных комбинаций $\xi_j = \sum\limits_{i=1}^{N} a_{ji} f_i$, $a_{ji} \in (-\infty, \infty)$, $i = 1, \ldots, N$, причем, как и раньше, общее число возможных измерений не превосходит $n (n \leqslant N) : j = 1, \ldots, n$. Требуется выяснить, какие линейные комбинации параметров объекта $f_1, \ldots, f_N$ следует измерять для наилучшего уточнения всех N параметров. Коэффициенты линейных комбинаций a_{ji}, $i = 1, \ldots, N$; $j = 1, \ldots, n$, определяют матрицу оператора A в том же базисе, в котором записаны числовые значения параметров объекта $f_1, \ldots, f_N$, или, иными словами, оптимальный измерительный прибор A для измерения гауссовского сигнала f.

Схему измерения вектора f запишем в виде $\xi = Af$, $\nu = 0$ с вероятностью единица. Пусть $f \in \mathcal{R}$ — случайный вектор, контролируемый нормальным распределением $\mathcal{N}(f_0, F)$ с известным математическим ожиданием и невырожденным корреляционным оператором. В задаче (3) оператор $A \in (\mathcal{R} \to \widetilde{\mathcal{R}})$ выбирается из множества операторов ограниченного ранга: $\mathrm{rank}\, A \leqslant n$. Перепишем задачу (3) в виде

$$\inf\{\|F_\xi^{1/2}\|_2^2 \mid A \in (\mathcal{R} \to \widetilde{\mathcal{R}}),\ \ \mathrm{rank}\, A \leqslant n\}. \tag{4}$$

Вектор $\xi = Af$ несет точную информацию о проекции вектора f на линейное подпространство $L = \mathcal{N}^\perp(A) = \mathcal{R}(A^*)$** размерности $\dim L = \mathrm{rank}\, A \leqslant n$ [2]. Естественно выбрать A таким, чтобы он «измерял» «наиболее неопределенные» координаты вектора f, т. е. следует выбрать $\mathcal{R}(A^*)$ так, чтобы векторы $(e_1, \ldots, e_n) \subset \mathcal{R}(A^*)$ и $(e_{n+1}, \ldots, e_N) \subset \mathcal{N}(A)$ образовывали ортонормированный базис в $\mathcal{R}$ такой, в котором координаты вектора f были бы независимы ***, первые n обладали бы наибольшими дисперсиями, а остальные — относительно меньшими. Эти рекомендации точно формулируются следующим образом.

---

* Ранг оператора A для этого, очевидно, должен быть наибольшим: $m = n$.

** $\mathcal{N}(A)$ — множество нулей (ядро) оператора A, т. е. $\mathcal{N}(A) = \{x \in \mathcal{R} : Ax = 0\}$. $\mathcal{R}(A)$ — множество значений оператора A, т. е. $\mathcal{R}(A) = \{y \in \widetilde{\mathcal{R}} : y = Ax\}$; символ $\perp$ означает ортогональное дополнение.

*** Такой базис называется базисом Карунена—Лоэва, порожденным f.

Теорема 2. Пусть $e_1, \ldots, e_N$ — ортонормированный базис $\mathscr{R}$, состоящий из собственных векторов корреляционного оператора $F: Fe_\mu = \varphi_\mu e_\mu$, $\mu = 1, \ldots, N$, упорядоченный так, что $\varphi_1 \geqslant \varphi_2 \geqslant \ldots \geqslant \varphi_N$. Тогда решением задачи (4) является любой оператор A, у которого $\mathscr{N}(A) = \mathscr{L}(e_{n+1}, \ldots \ldots, e_N)$. В частности, A может быть выбран ортогональным проектором на $\mathscr{L}(e_1, \ldots, e_n)$. При этом его матрица равна $\operatorname{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{n}, 0, \ldots, 0)$.

Оптимальным, например, является прибор, измеряющий первые n коэффициентов Фурье (f, e_i), $i = 1, \ldots, n$, сигнала f.

5°. Рассмотрим теперь случай, когда эксперимент, описанный в п. 4°, сопровождается измерительной ошибкой ν, контролируемой нормальным распределением $\mathscr{N}(0, \Sigma)$ с невырожденным корреляционным оператором Σ. Будем считать, что характеристики ошибок (оператор Σ) не зависят от того, каким прибором $A \in \mathscr{A}$ измеряется сигнал f по схеме (1). Если речь идет об использовании различных оптических или антенных устройств, то это означает довольно реалистическую ситуацию, когда основные ошибки возникают в тракте передачи сигнала.

Если искать решение задачи выбора оператора A из множества $\{A \in (\mathscr{R} \to \widetilde{\mathscr{R}}),\ \operatorname{rank} A \leqslant n\}$, то минимизирующая последовательность операторов для задачи (4) будет расходящейся, причем последовательность их норм будет стремиться к бесконечности. В данном случае это будет означать, что оптимальный измерительный прибор должен бесконечно усиливать входной сигнал. Так как мы лишены возможности конструировать такие приборы, то, помимо требования ограниченности ранга оператора A, необходимы дополнительные ограничения, выражающие технологические возможности приборостроения. Одна из моделей таких ограничений может быть сформулирована следующим образом. Пусть $e_1, \ldots, e_N$ — ортонормированный базис в $\mathscr{R}$, составленный из тестовых сигналов, и $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ — независимые случайные величины, причем $E\alpha_i = 0$, $E\alpha_i^2 = 1$, $i = 1, \ldots, N$. Сигнал $\varphi = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i e_i$, будучи подан на вход прибора A, вызовет отклик $\psi = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i A e_i$, средняя энергия которого равна $E\|\psi\|^2 = \sum_{\mu=1}^{N} \|Ae_i\|^2 = \|A\|_2^2$. Величина $\|A\|_2^2$ характеризует среднее усиление прибором A энергии входного сигнала указанного типа, и простейшее технологическое ограничение выглядит в виде неравенства $\|A\|_2^2 \leqslant \delta$.

Для выбора оптимального способа измерения гауссовского вектора по схеме (1) рассмотрим вариационную задачу

$$\inf\{\|F_\xi^{1/2}\|_2^2 \mid A \in (\mathscr{R} \to \widetilde{\mathscr{R}}),\quad \dim \widetilde{\mathscr{R}} \leqslant n,\quad \|A\|_2^2 \leqslant \delta\}. \tag{5}$$

Решение этой задачи дается следующей теоремой.

Теорема 3. Пусть $\{g_\mu\} \subset \widetilde{\mathscr{R}}$ и $\{e_\mu\} \subset \mathscr{R}$ — ортонормированные базисы, удовлетворяющие условиям

$$\Sigma g_\mu = \sigma_\mu g_\mu, \quad \mu = 1, \ldots, n; \quad Fe_\mu = \varphi_\mu e_\mu, \quad \mu = 1, \ldots, N,$$

и упорядоченные согласно неравенствам

$$0 < \sigma_1 \leqslant \sigma_2 \leqslant \ldots \leqslant \sigma_n; \quad \varphi_1 \geqslant \varphi_2 \geqslant \ldots \geqslant \varphi_N > 0;$$

тогда $Ae_\mu = \alpha_\mu^{1/2} g_\mu$, $\mu = 1, \ldots, n$; $Ae_\mu = 0$, $\mu = n+1, \ldots, N$ — решение задачи

(5), где сингулярные числа $\alpha_\mu^{1/2}$, $\mu=1,...,n$, определяются равенствами

$$\alpha_\mu = \begin{cases} \sqrt{\sigma_\mu/\omega} - \sigma_\mu/\varphi_\mu, & \text{если } \varphi_\mu > \sqrt{\omega\sigma_\mu}, \\ 0 & , \text{если } \varphi_\mu \leqslant \sqrt{\omega\sigma_\mu}, \end{cases}$$

а $\omega=\omega(\delta)$ — корень уравнения

$$\sum_{\mu:\omega^{-1/2} \geqslant \sqrt{\sigma_\mu}/\varphi_\mu} \left(\sqrt{\sigma_\mu/\omega} - \sigma_\mu/\varphi_\mu\right) = \delta.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Пытьев Ю. П. Матем. сб., 1983, **120**, № 2, с. 240. [2] Пытьев Ю. П. Матем. сб., 1982, **118**, № 1(5), с. 19. [3] Ширяев А. Н. Вероятность. М.: Наука, 1980.

Поступила в редакцию
23.01.85

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1985. Т. 26, № 6

АТОМНАЯ И ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА

УДК 539.12.01; 539.123.17

РАССЕЯНИЕ МАССИВНЫХ ДИРАКОВСКИХ НЕЙТРИНО В ПОЛЕ МАГНИТНОГО ДИПОЛЯ *

Б. К. Керимов, Э. Н. Халилов, В. П. Цветков

(кафедра теоретической физики)

1. В калибровочных теориях массы нейтрино, как и других фермионов, могут возникнуть в результате спонтанного нарушения симметрии. Подобный механизм имеет место в большинстве моделей большого объединения фундаментальных взаимодействий, которые предсказывают для нейтрино ненулевую массу (см., например, [1]). Результаты экспериментов группы ИТЭФ по измерению спектра электронов в β-распаде трития указывают на наличие у электронного антинейтрино массы $20 < m(\bar{\nu}_e) < 46$ эВ [2]. Астрофизические и космологические следствия ненулевой массы нейтрино рассмотрены в обзоре [3].

Появление экспериментальных указаний на возможность существования ненулевой массы у нейтрино повысило интерес к физическим явлениям, в которых это обстоятельство может оказаться существенным. В частности, в случае ненулевой массы становятся возможными переходы с изменением спиральности нейтрино, в то время как спиральность безмассового нейтрино является сохраняющимся квантовым числом в нейтринных реакциях.

В стандартной теории электрослабого взаимодействия магнитный момент массивного дираковского нейтрино μ_ν в однопетлевом приближении имеет величину [4, 5]

$$\mu_\nu = \frac{3cG_F m_\nu}{4\pi^2\sqrt{2}\hbar^3} m_e\mu_0 \cong 3{,}13\cdot10^{-19}\left(\frac{m_\nu c^2}{\text{эВ}}\right)\mu_0, \tag{1}$$

где $\mu_0 = e\hbar/(2m_e c)$ — магнитный момент электрона; G_F — константа

* Работа доложена на сессии по физике высоких энергий Отделения ядерной физики АН СССР (Москва, 17—21 октября 1983 г.).