ryukov A. S., Gotselguk Yu. V. Adv. Space Res., 1981, 1, p. 265. [10] Дарчиева Л. А. и др. Изв. АН СССР, сер. физ., 1982, 47, с. 1838. [11] Иванова Т. А., Сосновец Э. Н., Тверская Л. В. Геомагнетизм и аэрономия, 1976, 16, с. 152. [12] Бирюков А. С. и др. Космич. исслед., 1983, 21, с. 897.

Поступила в редакцию
28.06.85

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1986, Т. 27, № 1

УДК 537.591

РАЗВИТИЕ ЭЛЕКТРОННО-ЯДЕРНОГО КАСКАДА В ОДНОРОДНОМ ПОГЛОТИТЕЛЕ С УЧЕТОМ РАСПАДА И ИОНИЗАЦИОННЫХ ПОТЕРЬ

И. П. Иваненко, Т. М. Роганова

Введение. Изучение характеристик взаимодействия адронов и ядер космических лучей при энергии $E \geqslant 10^2$ ГэВ связано с необходимостью проведения детальных расчетов энергетических, пространственно-энергетических и временных характеристик различных компонент космических лучей на нескольких уровнях наблюдения и функции искажения экспериментальной установки. Вычисление функции искажения требует не только информации о средних характеристиках каскада, но и детальных сведений о флуктуациях [1]. Для эффективного выполнения расчетов при достаточно широком классе рассматриваемых моделей взаимодействия необходимо иметь набор простых и универсальных аналитических [2—4] или аналитически-численных методов [5—8], позволяющих рассчитать средние характеристики и их дисперсии для набора компонент в широких интервалах изменения переменных. Только после сопоставления результатов таких расчетов со всеми доступными экспериментальными данными целесообразно для отобранных моделей проводить более детальные и точные вычисления с использованием метода Монте-Карло [9—10].

Настоящая работа посвящена разработке простого, приближенного аналитического метода решения каскадных уравнений, аналогичного широко использованному нами ранее q-способу [5, 11, 12] при решении задач о развитии электронно-фотонных ливней с сечениями, являющимися существенно неоднородными функциями энергии.

Метод решения уравнений. Запишем основные уравнения переноса нуклонов и пионов в однородном поглотителе с учетом ионизационных потерь и распада:

$$\frac{\partial F_N(z, E)}{\partial z} = -\frac{1}{\lambda_N(E)} F_N(z, E) + \int\limits_E^{E_0} \frac{F_N(E', z)}{\lambda_N(E')} W_{NN}(E', E)\, dE' + \beta_N \frac{\partial F_N(z, E)}{\partial E}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial F_\pi(z, E)}{\partial z} = -\frac{1}{\lambda_\pi(E)} F_\pi(z, E) + \int\limits_E^{E_0} \frac{F_\pi(E', z)}{\lambda_\pi(E')} W_{\pi\pi}(E', E)\, dE' + \int\limits_E^{E_0} \frac{F_N(E', z)}{\lambda_N(E')} W_{\pi N}(E', E)\, dE' + \beta_\pi \frac{\partial F_\pi(E, z)}{\partial E} - \frac{C}{E} F_\pi(E, z). \tag{2}$$

Здесь $F_N(z, E)$, $F_\pi(z, E)$ — средние числа нуклонов и пионов на глубине z с энергиями $E, E+dE$; $\lambda_N(E)$ и $\lambda_\pi(E)$ — пробеги взаимодействия нуклонов и пионов соответственно, выраженные в г/см^2; $W_{NN}(E', E)$, $W_{\pi\pi}(E', E)$, $W_{\pi N}(E', E)$ — спектры нуклонов и пионов (первый индекс), образованных при взаимодействии нуклонов и пионов (второй индекс) с ядрами атомов среды. Дифференциальные по E члены учитывают изменение среднего числа нуклонов и пионов за счет потерь энергии на ионизацию и возбуждение атомов среды, $C/E = mc^2/(C\tau_0\rho E)$ — величина, обратная распадному пробегу в г/см^2, mc^2 — масса пиона, $c\tau_0$ — его время жизни, ρ — плотность среды.

Как показано в ряде работ [2, 4], в случае скейлинговых спектров и постоянных пробегов взаимодействия, а также при логарифмическом росте сечений решения уравнений (1) и (2) без учета распада и ионизационных потерь могут быть получены методом двойных функциональных преобразований по глубине z (Лапласа) и по E (Меллина). При постоянном сечении получаются алгебраические уравнения, при логарифмическом росте сечения — обыкновенные дифференциальные по s уравнения, решаемые в квадратурах.

В более сложных задачах, когда необходимо учесть влияние распада и ионизационных потерь, метод двойных функциональных преобразований приводит к алгебраическим или дифференциальным уравнениям в конечных разностях, что существенно затрудняет получение аналитических решений.

Поэтому, как и в каскадной теории электронно-фотонных ливней, выведем приближенные уравнения, которые облегчают получение трансформант решения в практически неограниченных интервалах изменения переменных и параметров, дадут возможность оценить точность решений, а также в случае необходимости развить удобный метод последовательных приближений для нахождения точного решения.

Умножим уравнения (1) и (2) на $e^{-\lambda z}$ и проинтегрируем их по z от 0 до ∞. Ограничимся для начала рассмотрением случая первичной частицы энергии E_0 на границе и опустим для простоты в уравнении (2) функцию источника пионов, рожденных нуклонами. Легко показать, что при других граничных условиях и произвольных функциях источника решение уравнений (1) и (2) легко выражается с помощью интегралов [11]. Тогда для функций F_N и F_π получим следующие уравнения:

$$\lambda F_N(\lambda, E) + \frac{1}{\lambda_N(E)} F_N(\lambda, E) - \int\limits_E^{E_0} \frac{F_N(\lambda, E')}{\lambda_N(E')} W_{NN}(E', E)\, dE' -$$

$$- \beta_N \frac{\partial F_N(\lambda, E)}{\partial E} = L_N(F_N(\lambda, E_0, E)) - \beta_N \frac{\partial F_N}{\partial E}(\lambda, E) = \delta(E_0 - E), \quad (3)$$

$$\lambda F_\pi(\lambda, E) + \frac{1}{\lambda_\pi(E)} F_\pi(\lambda, E) - \int\limits_E^{E_0} \frac{F_\pi(\lambda, E')}{\lambda_N(E')} W_{\pi\pi}(E', E)\, dE' -$$

$$- \beta_\pi \frac{\partial F_\pi(\lambda, E)}{\partial E} + \frac{C}{E} F_\pi(\lambda, E) = L_\pi(F_\pi(\lambda, E_0, E)) -$$

$$- \beta_\pi \frac{\partial F_\pi(\lambda, E)}{\partial E} + \frac{C}{E} F_\pi(\lambda, E) = \delta(E_0 - E). \quad (4)$$

Упростим выражения для $L[F_N]$ и $L[F_\pi]$. С этой целью умножим $L[F_N]$ и $L[F_\pi]$ на E^s и проинтегрируем по dE от E_1 до E_0 (здесь s — некоторый, пока неопределенный комплексный параметр). Изменив в интегралах порядок интегрирования и обозначение E на E' и E_1 на E, получим

$$\int_E^{E_0} E'^s L\left[F_N(\lambda, E_0, E')\right] dE' = \int_E^{E_0} F_N(\lambda, E_0, E')\, \varphi_N(E', E, \lambda, s)\, dE', \qquad (5)$$

где

$$\varphi_N(E', E, \lambda, s) = E'^s \left(\lambda + \frac{1}{\lambda_N(E')} - \frac{1}{\lambda_N(E')} \int_{E/E'}^{1} f_{NN}(E', x)\, x^s dx\right),$$

$$\frac{f_{NN}(E', x)}{E'} dE' = W_{NN}(E', E)\, dE' = \frac{f_{NN}(E', x)}{x} dx, \quad x = \frac{E}{E'}.$$

Инклюзивный спектр $f_{NN}(E', x)$ состоит из двух частей: $f_{NN}(E', x) = f_{0N}(x) + f_{1N}(E', x)$, где $f_{0N}(x)$ описывает часть спектра, сохраняющую форму, $f_{1N}(E', x)$ — нескейлинговая добавка. Аналогично для пионного оператора $L(F_\pi(\lambda, E_0, E))$

$$\int_E^{E_0} E'^s L\left[F_\pi(\lambda, E_0, E')\right] dE' = \int_E^{E_0} F_\pi(\lambda, E_0, E')\, \varphi_\pi(E', E, \lambda, s)\, dE', \qquad (6)$$

где

$$\varphi_\pi(E', E, \lambda, s) = E'^s \left(\lambda + \frac{1}{\lambda_\pi(E')} - \frac{1}{\lambda_\pi(E')} \int_{E/E'}^{1} f_{\pi\pi}(E', x)\, x^s dx\right),$$

$$\frac{f_{\pi\pi}(E', x)}{x} dx = W_{\pi\pi}(E', E)\, dE', \quad f_{\pi\pi}(E', x) = f_{0\pi}(x) + f_{1\pi}(E', x),$$

$f_{0\pi}$ и $f_{1\pi}$ — соответственно скейлинговая и нескейлинговая части инклюзивных спектров.

Введем традиционные обозначения

$$A_{NN}(s) = 1 - \int_0^1 f_{0N}(x)\, x^s dx, \quad A_{\pi\pi}(s) = 1 - \int_0^1 f_{0\pi}(x)\, x^s dx.$$

Примем для определенности логарифмический закон роста с энергией сечения неупругого взаимодействия

$$\frac{1}{\lambda_{N,\pi}(E)} = \frac{1}{\lambda^0_{N,\pi}} + \frac{\alpha_{N,\pi} \ln E/E_{\text{кр}\, N,\pi}}{\lambda^0_{N,\pi}}$$

и будем считать, что $f_{1N}(E', x) = 0$ и $f_{1\pi}(E', x) = 0$, т. е. инклюзивные спектры имеют скейлинговый вид. Получим явное выражение для функции $\varphi_{N\pi}(E', E, \lambda, s)$, используя следующий вид инклюзивных спектров:

$$f_{0N}(x) = 1, \quad f_{0\pi}(x) = e^{-4{,}76x}((1-x)/x) + 0{,}6.$$

Для того чтобы функции $\varphi_{N\pi}(E', E, \lambda, s)$ слабо менялись с изменением E/E', свяжем λ и s следующими соотношениями:

$$\lambda_N{}^0\lambda + A_{NN}(s_N) = 0, \quad \lambda_\pi{}^0\lambda + A_{\pi\pi}(s_\pi) = 0,$$

где

$$A_{NN}(s)=1-\int_0^1 x^s dx = s/(s+1),$$

$$A_{\pi\pi}(s)=1-\int_0^1 \frac{(1-x)}{x} e^{-4,76x} x^s dx-\int_0^1 0,6x^s dx=$$

$$=1-\frac{0,6}{s+1}-(4,76)^s \gamma(s,\ 4,76)+(4,76)^{s-1}\gamma(s+1,\ 4,76),$$

γ — неполная гамма-функция.

В этом случае соотношения (5) и (6) переписываются в виде

$$\int_E^{E_0} E'^s L\left[F_{N,\pi}(E_0,\ E',\ s)\right] dE' = E^s q_{N,\pi}(E_0,\ E,\ s)\, N_{N,\pi}(E_0,\ E,\ s). \qquad (7)$$

Здесь $N_{N,\pi}(E_0,\ E,\ s)$ — интегральные числа нуклонов и пионов с энергиями больше E,

$$q_{N,\pi}(E,\ s)=$$

$$=\frac{1}{N_{N,\pi}(E_0,E,s)}\int_E^{E_0}\frac{\partial N_{N,\pi}(E_0,E',s)}{\partial E'}\varphi_{N,\pi}\left(E',\ E,\ \lambda=\left\{\begin{matrix}\dfrac{-A_{NN}(s)}{\lambda_N^0}\\ \dfrac{-A_{\pi\pi}(s)}{\lambda_\pi^0}\end{matrix}\right\},\ s\right). \qquad (8)$$

Продифференцируем (7) по E и разделим полученное равенство на E^s. В результате получим приближенное выражение для операторов $L[F_{N,\pi}(\lambda,\ E_0,\ E)]$, описывающих процессы множественного рождения нуклонов и пионов:

$$L\left[F_{N,\pi}(\lambda,\ E_0,\ E)\right]=\frac{s q_{N,\pi}(E_0,E,s)}{E} N_{N,\pi}(E_0,\ E,\ s)+$$

$$+q_{N\pi}(E_0,\ E,\ s)\frac{\partial N_{N,\pi}(E_0,E,s)}{\partial E}+\frac{\partial q_{N,\pi}(E_0,E,s)}{\partial E}N_{N,\pi}(E_0,\ E,\ s). \qquad (9)$$

Таким образом, мы нашли приближенное выражение для операторов, аналогично тому, как это было сделано в каскадной теории электронно-фотонных ливней для оператора, описывающего процессы радиационного торможения электронов и образования пар фотонами. С учетом (9) уравнения (3) и (4) можно записать в форме

$$\frac{\partial N_{N,\pi}(E_0,E,s)}{\partial E}+\left(\frac{s}{E}+\frac{\partial \ln q_{N,\pi}(E_0,E,s)}{\partial E}\right)N_{N,\pi}(E_0,\ E,\ s)-$$

$$-\frac{C}{Eq_\pi}\frac{\partial N_\pi}{\partial E}+\frac{\beta_{N,\pi}}{q_{N,\pi}}\frac{\partial^2 N_N(\lambda,\ E)}{\partial E^2}=\frac{\delta(E_0-E)}{q_{N,\pi}}. \qquad (10)$$

Решение этого дифференциального уравнения (при отсутствии ионизационных потерь) $\beta_{N\pi}=0$ легко записывается в квадратурах. Уравнение (10) без правой части при $\partial \ln q/\partial E=0$ сводится к вырожденному гипергеометрическому уравнению со значениями параметров $c=0$, $a=s$. Считаем в первом приближении $q(E,\ s)=q(s)$ и $\beta_{N\pi}=0$, тогда решение уравнения (10) для нуклонов

$$N_N(s,\ E)=\frac{1}{q_N(E_0,E,s)}\left(\frac{E_0}{E}\right)^s. \qquad (11)$$

Решение точного уравнения (3) при $a_N=0$ и приближенного (10) легко получить, они оказываются совпадающими и равными

$$N_N^{sc}(E, \lambda(s)) = \frac{E_0^s}{s\, dA_{NN}(s)/ds} \exp\left(\frac{-zA_{NN}(s)}{\lambda_N^0}\right).$$

Соответственно для $q(E, s)$ получаем выражение

$$q(E,s) = q(s) = s dA_{NN}(s)/ds.$$

Если $q(E,s)$ зависит от E, то как и в [5], можно развить метод последовательных приближений, в этом случае

$$L[F_N^{(2)}(s, E)] = q^{(1)}(E, s)\frac{\partial N_N^{(2)}(s, E)}{\partial E} +$$

$$+\frac{sq^{(1)}(E, s)}{E} N_N^{(2)}(s, E) + \frac{\partial q^{(1)}(E, s)}{\partial E} N_N^{(2)}(s, E)$$

и т. д.

При этом подходе, как и в [5], члены уравнения, описывающие ионизационные потери, распад, входят дополнительными членами в выражение для $\varphi^{Ncs}(E', E, s)$ и в q. Может оказаться, что, как и в [5], при «сложных» представлениях сечений всех существенных процессов легче найти аппроксимацию $\int_E^{E_0} L[F(s, E')]E'^s dE'$, а не оператор $L[F(s, E)]$.

Обсуждение результатов. На рис. 1 представлено отношение точных функций $N_N(z, E)$, полученных из [2] и приближенных по (10) и из решения уравнения с $q(E_0, E, s)$ по (8). Видно, что во всем диапазоне параметров погрешность приближенных решений не превышает ~20%. На рис. 2 представлено отношение N_π^1 «с учетом распада» к N_π^0 «без учета распада». Видно, что при $E \leqslant 10$ ГэВ пренебрегать распадным членом в уравнении нельзя. Таким образом, описанный метод решения может быть эффективно использован для получения с удовлетворительной точностью средних величин и первых моментов функции распределения частиц электронно-ядерного каскада для нескейлинговых моделей.

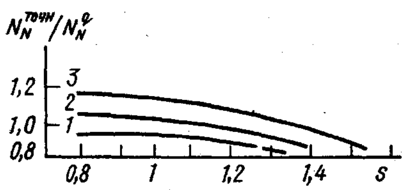

Рис. 1. Отношение интегрального числа нуклонов с энергиями, большими E, на глубине $z=10\ \lambda_N^0$ для точного и приближенного решений: $E_0/E=10$ (1), 10^3 (2) и 10^5 (3)

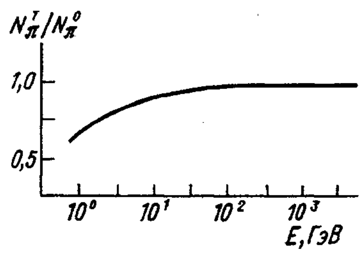

Рис. 2. Отношение числа пионов с учетом распада к числу пионов без учета распада при $E_0=10^5$ ГэВ, $s=1$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Chuykova T. A. et al. Preprint N 002 P. N. Lebedev Physical Institute. Moscow, 1980. [2] Ivanenko I. P., Kanevsky B. L., Roganova T. M. Preprint N 001 P. N. Lebedev Physical Institute. Moscow, 1979. [3] Shibata T. Progr. of Theor. Phys., 1976, 56, p. 1845. [4] Kasahara K. CRL-Report-78, Cosmic Ray Laborat. Un. of Tokyo, 1978. [5] Беляев А. А. и др. Электронно-фотонные каскады в космических лучах при сверхвысоких энергиях. М.: Наука, 1980. [6] Fuchs B., Thielheim K. O. In: Proc. 7th European Cosmic Ray Symp., 1980, p. 92. [7] Бояджян М. Г., Гаряка А. П., Мамиджанян Э. А. Изв. АН СССР, сер. физ., 1981, 45, с. 1243. [8] Ерлыкин А. Д., Кузина Н. П. Изв. АН СССР, сер. физ., 1981, 45, с. 1226. [9] Astafiev V. A., Mukhamedshin R. In: Proc. 16th Intern. Cosmic Ray Conf., 1979, v. 7, p. 204. [10] Antonov R. A., Ivanenko I. P., Kuzmin V. A. In: Proc. 16th Intern. Cosmic Ray Conf., 1979, v. 9, p. 263. [11] Иваненко И. П. Электромагнитные каскадные процессы. М.: Изд-во МГУ, 1972. [12] Аминева Т. П. и др. Исследование мюонов сверхвысоких энергий. М.: Наука, 1975.

Поступила в редакцию
03.07.85

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1986, Т. 27, № 1

УДК 550.383

О ПРОИСХОЖДЕНИИ ПРОДОЛЬНЫХ ТОКОВ В ПОЛЯРНОЙ ТОКОВОЙ СИСТЕМЕ

В. П. Шабанский

В первом разделе настоящей работы будет кратко описана уточненная картина процессов в удаленных областях магнитосферы, связанных силовыми линиями геомагнитного поля с полярной ионосферой. Эта картина, последовательно развитая в работах автора [1—6] и основанная на данных об ионосферных токах, включала в себя как необходимый элемент составляющую токов вдоль магнитного поля, замыкающихся в ионосфере. В последние годы продольные токи были измерены на спутниках прямыми методами. Оказалось, что почти постоянно существуют продольные токи над полярной ионосферой.

Различают две системы продольных токов: 1-я концентрируется вдоль полярной границы аврорального овала; 2-я — у его приэкваториальной границы. (Полярный овал шириной 1—3° смещен относительно геомагнитного полюса в ночную сторону так, что дневная его граница проходит на широтах 75—80°, а ночная — на широтах 65—70°; магнитные силовые линии геомагнитного поля, проектирующиеся в овал, разделяют магнитосферу на сердцевину — область с с замкнутыми силовыми линиями и хвост — область с разомкнутыми или резко изломанными в нейтральном слое силовыми линиями, вытянутыми в ночную сторону.) 1-я система продольных токов замыкается в ионосфере педерсеновскими токами, главным образом через полярный овал на 2-ю систему, а в случае отсутствия 2-й системы (в очень геомагнитно-спокойные периоды) — через полярную шапку. 1-я система состоит из токов, втекающих с утренней стороны и вытекающих с вечерней стороны полярного овала. Во 2-й системе направление токов противоположно.

Во втором разделе будет рассмотрен возможный механизм образования этих систем продольных токов, связанный с представлениями о процессах, описываемых в первом разделе. Можно сказать, что развиваемая ранее автором картина относится к возмущенным периодам (суббуря), а новые представления о продольных токах (второй раздел) — к более спокойным периодам.