ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 550.38

ПОЛЯРИЗАЦИЯ И НАМАГНИЧИВАНИЕ НЕЙТРАЛЬНЫХ ВРАЩАЮЩИХСЯ ТЕЛ

В. И. Григорьев, Е. В. Григорьева

(кафедра квантовой теории и физики высоких энергий; ИФЗ)

Первое высказывание о том, что под воздействием гравитационного поля в толще небесных тел должна происходить электрическая поляризация и что вращение таких поляризованных тел должно порождать магнитные поля, принадлежит Сузерленду [1] и датируется 1903 годом.

П. Н. Лебедев был одним из немногих, кто не только оценил важность этой идеи, но и пытался исследовать явление экспериментально. Публикация П. Н. Лебедева «Магнитометрические исследования вращающихся тел» появилась в 1911 г. [2]. Обнаружить магнитное поле, которое должно было, по мысли П. Н. Лебедева, появляться из-за вращения электрических диполей, возникающих в быстро вращающемся теле под действием центробежных сил, он не смог. Неудачными оказались и более поздние попытки других исследователей [3]. И хотя в конце шестидесятых — начале семидесятых годов снова стали появляться работы, посвященные гравитационной поляризации (см., например, [4—8]), однако из-за разнобоя теоретических оценок и отсутствия надежных экспериментальных данных интерес к этому явлению заметно ослабел. В частности, гео- и астрофизические аспекты проблемы гравитационной поляризации почти не затрагивались, и попытки выяснения физической природы магнитных полей Земли, Солнца и других небесных тел пошли по новому руслу. После появления «моделей динамо» [9] и многочисленных посвященных им теоретических исследований (см., например, [10—15] и приведенные там ссылки) все более укреплялось мнение, что основная роль при генерации магнитных полей принадлежит магнитогидродинамическим эффектам.

После того как в 1980 г. удалось показать [16], что магнитные поля Земли, Солнца и ряда других небесных тел имеют значения, близкие к получающимся на базе представлений о гравитационной поляризации, появилась настоятельная необходимость вернуться — но уже на качественно новом уровне — к опытам П. Н. Лебедева.

Первые эксперименты, позволившие обнаружить магнитное поле, порождаемое вращением нейтрального тела, — тогда это была ампула, наполненная ртутью, — были выполнены в 1983 г. Б. В. Васильевым (ОИЯИ, Дубна) [17]. Дальнейшие опыты с вращением свинцового и титанового цилиндров позволили не только подтвердить наличие эффекта, но и более точно исследовать зависимость от параметров тел и частоты вращения [18]. Появление этих важных экспериментальных данных вновь побуждает обратиться к вопросу о едином теоретическом описании как гравитационной, так и центробежной поляризации. Ниже предлагается попытка такого единого описания.

Подход, который здесь развивается, является макроскопическим. Параметры вещества, в частности плотность и модуль всестороннего сжатия (для наиболее простого варианта теории достаточно этих двух параметров), считаются заданными. «Подгоночных» параметров в теории нет.

Хорошо известно (см., например, [19]), что условие равновесия в системе, испытывающей сторонние воздействия, можно записать в виде $\mu=\text{const}$, где μ — химический потенциал. Ниже рассматриваются среды, однородные по составу; при этом химический потенциал совпадает с термодинамическим потенциалом, отнесенным к одной молекуле. Удобнее, однако, полагая, что интересующие нас вещества являются почти несжимаемыми, пользоваться объемной плотностью термодинамического потенциала:

$$\mu/V \Rightarrow \Phi/V=(F+pV)/V=f+p,$$

где $f\equiv F/V$ — плотность свободной энергии, p — давление.

Условие равновесия при наличии внешнего гравитационного или центробежного поля в соответствии с вышеизложенным можно записать так:

$$\operatorname{grad}\{f+p\}=0. \tag{1}$$

Из члена f выделим прежде всего части, определяемые наличием различных полей.

Потенциальная энергия единицы объема вещества в гравитационном или центробежном поле равна $\tau\varphi$, где τ — механическая плотность, принимаемая ниже за постоянную, а φ — потенциал рассматриваемого поля.

Плотность энергии электрического поля, возникающего благодаря гравитационной или центробежной поляризации, будем записывать в виде $E^2/(8\pi)$; такая запись является приближенной, поскольку $\mathbf{E}$ понимается как макроскопическая, т. е. усредненная по физически бесконечно малым объемам напряженность электрического поля, отличающаяся как от микроскопической напряженности, так и от напряженности эффективного поля. Однако для интересующих нас оценок по порядку величины такое приближение приемлемо. Что же касается магнитного поля, которое возникает при движении поляризованного вещества, то в нерелятивистском случае оно дает столь малый вклад в f, что им можно пренебречь.

Плотность свободной энергии зависит, конечно, также и от химического состава вещества и ряда физических величин, из которых особо выделим давление. Зависимость от давления в самом простом варианте, когда среда изотропна и ее можно описывать в гидродинамическом приближении и при этом полагать, что деформации подчиняются закону Гука, также получается достаточно простой: когда давление повышается до значения p, f возрастает на величину

$$\Delta f=p^2/(2\mathscr{B}), \tag{2}$$

где $\mathscr{B}$ — модуль всестороннего сжатия среды.

Подставляя в (2) выражение $f=f_0+p^2/(2\mathscr{B})+E^2/(8\pi)+\tau\varphi$, где f_0, очевидно, есть значение f при отсутствии полей и при нулевом давлении, а также учитывая, что в гидродинамическом приближении распределение давлений определяется условием

$$\operatorname{grad}\{\tau\varphi+p\}=0,$$

получаем весьма простое по виду соотношение, связывающее E^2 и p^2:

$$\operatorname{grad}\{E^2/(8\pi)+p^2/(2\mathscr{B})\}=0, \tag{3}$$

и являющееся основой для всего дальнейшего рассмотрения.

Поля, возникающие благодаря гравитационной и центробежной поляризации, можно обсуждать, пользуясь как можно более простыми моделями, не исключающими, однако, возможности получения реалистических оценок.

Первая из таких моделей — однородный шар плотности τ и радиуса R, вращающийся с постоянной угловой скоростью ω; мы будем полагать, что вращение настолько медленно, что центробежными эффектами можно пренебречь, так что поляризация порождается только гравитационным полем шара. Потенциал этого гравитационного поля на расстоянии r от центра шара имеет вид $\varphi=(2\pi/3)\,G\tau r^2$. Использовав (2) и учтя, что давление на поверхности $r=R$ обращается в нуль, получаем для p известное выражение

$$p=(2\pi/3)\,G\tau^2(R^2-r^2), \tag{4}$$

G — гравитационная постоянная.

По мере приближения к центру реальных небесных тел давление растет, конечно, быстрее, чем по закону (4). Это тем более существенно, что модуль всестороннего сжатия $\mathscr{B}$ меняется при изменении p. Поэтому представляется целесоообразным рассмотреть два варианта задачи: 1) когда давления относительно невелики, так что $\mathscr{B}$ можно приближенно рассматривать как некую постоянную величину $\mathscr{B}_0$, и 2) когда p порядка или больше $\mathscr{B}_0$ и когда из-за увеличения энергии Ферми $\mathscr{B}$ начинает возрастать пропорционально давлению: $\mathscr{B}=\gamma p$ (если использовать модель независимых электронов, $\gamma=5/3$).

Первый из указанных вариантов, если воспользоваться (3) и учесть сферическую симметрию задачи, дает для единственной отличной от нуля — радиальной — компоненты $E_r\equiv E$ выражение

$$E=\sqrt{8\pi\left\{\mathrm{const}-\frac{2\pi^2}{9\mathscr{B}_0}G^2\tau^4(R^2-r^2)^2\right\}}. \tag{5}$$

Постоянная интегрирования определяется условием $\mathrm{E}|_{r=0}=0$, обеспечивающим, заметим, и неотрицательность подкоренного выражения в (5). Таким образом, получаем

$$E=(4\pi/3)\,G\tau^2\sqrt{\pi/\mathscr{B}_0}\,r\sqrt{2R^2-r^2}.$$

Поляризация возникает благодаря тому, что положительно заряженные атомные остовы под действием гравитационной силы смещаются по отношению к электронам проводимости (в диэлектриках — электронам внешних оболочек атомов), образующим относительно жесткий «каркас», тем более жесткий, чем больше давление. Поскольку остовы перемещаются по направлению к центру шара, возникающее при этом электрическое поле направлено от центра, т. е. $E>0$, так что нужно брать положительный знак корня.

Плотность эффективных объемов зарядов определяется уравнением Максвелла:

$$\rho_{\text{об}}=\frac{1}{4\pi}\operatorname{div}\mathbf{E}=\frac{2}{3}G\tau^2\sqrt{\frac{\pi}{\mathscr{B}_0}}\,\frac{3R^2-2r^2}{\sqrt{2R^2-r^2}}.$$

Плотность поверхностных зарядов

$$\rho_{\text{пов}}=-(1/3)\,G\tau^2R^2\sqrt{\pi/\mathscr{B}_0}.$$

Вращение зарядов порождает магнитное поле; напряженность этого поля, если ограничиться линейным по v/c приближением, оказывается одинаковой как в инерциальной, так и в собственной системах шара.

Поле за пределами шара получается чисто дипольным, как то было показано, например, в [20—21]. Магнитный дипольный момент

$$\vec{\mathscr{M}} = \frac{1}{2c} \int dV \cdot \rho_{\text{об}} [\mathbf{r} [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}]] + \frac{4\pi}{3c} \omega \rho_{\text{пов}} R^4 = -\frac{\pi}{27c} (3\pi - 4)\, G\tau^2 \omega R^6 \sqrt{\frac{\pi}{\mathscr{B}_0}}.$$

Подставив же в (3) $\mathscr{B} = \gamma p$, после аналогичных выкладок получаем

$$E = 2\pi\tau r \sqrt{2G/(3\gamma)},$$

что дает

$$\rho_{\text{об}} = \tau \sqrt{3G/(2\gamma)}; \quad \rho_{\text{пов}} = -\tau R \sqrt{G/(6\gamma)}$$

и

$$\vec{\mathscr{M}} = -\frac{8\pi}{15c} \omega \tau R^5 \sqrt{G/(6\gamma)}. \tag{6}$$

По (6) магнитные моменты получаются примерно пропорциональными механическим (но имеющим противоположные им направления); такая пропорциональность уже отмечалась ранее [22].

Полученные выше выражения для магнитных моментов базируются на заведомо упрощенной модели, не учитывающей химической неоднородности, зависимости плотности от расстояния от центра, возможности внутренних дифференциальных движений и целого ряда других факторов. И тем не менее, как уже отмечалось в [16—18], оценки дают для Земли, Солнца и ряда других небесных тел значения, довольно близкие по порядку величины к эмпирическим. Как правило, для звезд и гигантских планет эти оценки оказываются несколько (на порядок, а порой и более) завышенными, что, по-видимому, связано с тем, что в реальных небесных телах такого типа играет заметную роль повышение плотности по мере приближения к центру. Хотелось бы, однако, заметить, что ни эти расхождения, ни другие очевидные проблемы, порождаемые упрощенностью модели, допускающей, впрочем, естественные усовершенствования, не могут заслонить основного — вывода о важности роли гравитационной поляризации в формировании магнитных полей планет и звезд.

Попытаемся теперь показать, что, основываясь на условии (3), можно получить реалистические оценки и для полей, возникающих в лабораторном эксперименте по исследованию центробежной поляризации.

Пусть имеется вращающийся как целое с угловой скоростью ω однородный цилиндр; радиус его R значительно меньше длины, что позволяет пренебречь краевыми эффектами. Чтобы вновь воспользоваться гидродинамическим описанием, будем предполагать, что вещество цилиндра — жидкость, помещенная в идеально жесткую оболочку *; тогда зависимость давления от расстояния до оси вращения r такова:

$$p = (1/4)\tau\omega^2(2r^2 - R^2).$$

Подставляя это в (3), проводя интегрирование (с учетом осевой симметрии) и выбирая постоянную интегрирования так, чтобы напря-

* Это предположение не является принципиально важным; переход к рассмотрению твердых цилиндров несколько усложняет теоретический аппарат и даже изменяет детали распределения полей, но не конечные оценки.

женность поля **E** обращалась в нуль на оси цилиндра (что, кстати, обеспечивает и действительность **E**), получаем

$$E \equiv E_r = -\tau\omega^2 r \sqrt{\frac{\pi}{\mathscr{B}_0}(R^2 - r^2)}. \qquad (7)$$

Плотность эффективных объемных зарядов

$$\rho_{об} = \frac{\tau\omega^2}{4\pi}\sqrt{\frac{\pi}{\mathscr{B}_0}}\,\frac{3r^2 - 2R^2}{\sqrt{R^2 - r^2}}.$$

Полный объемный заряд получается при этом нулевым, так что плотность поверхностных зарядов $\rho_{пов} = 0$.

Появление знака минус в (7) определяется, как и выше, физикой перегруппировки зарядов при центробежной поляризации. Что же касается подстановки $\mathscr{B} = \mathscr{B}_0$, то она оправдывается относительной малостью давлений в условиях эксперимента Б. В. Васильева: $p_{max} \sim \sim 10^7 - 10^8$ (здесь и далее используется система единиц СГС).

Напряженность магнитного поля **H** определяется уравнением Максвелла $\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = (4\pi/c)\,\mathbf{j} = (4\pi/c)\rho_{об}\mathbf{v}$, которое с учетом симметрии задачи переписывается в цилиндрических координатах $\{r, \psi, z\}$ в виде

$$(\mathrm{rot}\,\mathbf{H})_\psi = -\frac{\partial H_z}{\partial r} = \frac{4\pi}{c}\,\omega r \rho_{об} = \frac{d}{dr}\left(\frac{\omega r}{c}\,E\right).$$

Из этого уравнения и из граничного условия $H_z|_{r=R} = 0$ получаем

$$H_z = \frac{\tau\omega^3}{c}\sqrt{\frac{\pi}{\mathscr{B}_0}}\,r^2\sqrt{R^2 - r^2}.$$

Поток напряженности магнитного поля через площадь сечения цилиндра оказывается тогда следующим:

$$\Delta\Phi_H = 2\pi\int_0^R r\,dr\,H_z = \frac{4\pi\tau\omega^3 R^5}{15c}\sqrt{\frac{\pi}{\mathscr{B}_0}}. \qquad (8)$$

Подставляя в эту формулу значения параметров, относящиеся к экспериментам Б. В. Васильева, нетрудно убедиться, что оценки дают тот же порядок величины для $\Delta\Phi_H$, что и измерения. Правильно описываются и соотношения между потоками, полученными в опытах с различными материалами, что также говорит в пользу предложенного здесь описания.

Хотелось бы в заключение еще раз вернуться к опытам П. Н. Лебедева. Он был довольно близок к цели: если бы тогда удалось повысить точность на два-три порядка, центробежная поляризация могла бы быть открыта и эксперимент нашего замечательного физика должен был бы оказать глубокое влияние на формирование представлений о природе небесных тел, в том числе Земли и Солнца.

Пользуемся возможностью поблагодарить Б. В. Васильева и В. Д. Кукина за их интерес к работе и важные для нас замечания.

Примечание к корректуре

Центробежная поляризация во вращающемся цилиндре должна возникать только в тех участках, где существует сжатие, так как только при этом может проявляться жесткость электронного «каркаса». Поправка, учитывающая это, приводит к уменьшению значения для $\Delta\Phi$ примерно в два (1,856) раза по сравнению с [8].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Sutherlend W. Terrestr. Magn. and Atm. Elec., 1903, 8, p. 49; 1904, 9, p. 167. [2] Лебедев П. Н. Журн. Русск. физ.-хим. о-ва, часть физ., 1911, 45, с. 484. [3] Swann W., Langacre F. G. J. Franklin Inst., 1928, 205, N 4, p. 421. [4] Shiff L. I., Barnhill M. V. Phys. Rev., 1966, 151, p. 1067. [5] Dessler A. J., Michel F. G., Rorschach H. E., Trammel G. T. Phys. Rev., 1968, 166, p. 777. [6] Iriger T. Phys. Rev. B, 1970, 2, p. 825. [7] Leung M. C. Nuovo Cim., 1972, 7, p. 220. [8] Kumar N., Nadini R. Phys. Rev. D, 1973, 7, p. 3586. [9] Френкель Я. И. Изв. АН СССР, сер. физ., 1947, 11, с. 607. [10] Яновский Б. М. Земной магнетизм. Л.: Изд-во ЛГУ, 1978. [11] Джекобс Дж. Земное ядро. М.: Мир, 1979. [12] Моффат Г. Возбуждение магнитного поля в проводящей среде. М.: Мир, 1980. [13] Брагинский С. И. Итоги науки и техники. Магнетизм планет, 1980, 5, с. 96. [14] Долгинов Ш. Ш. Там же, 1980, 5, с. 31. [15] Долгинов Ш. Ш. Там же, 1982, 18, с. 3. [16] Григорьев В. И., Григорьева Е. В. Препринт № 4/1980 физ. фак. МГУ. М., 1980. [17] Васильев Б. В. Препринт ОИЯИ Р 14-84-406. Дубна, 1984. [18] Васильев Б. В. Препринт ОИЯИ Р 14-84-255. Дубна, 1984. [19] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. М.: Наука, 1964. [20] Григорьев В. И., Григорьева Е. В. Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон., 1984, 25, № 2, с. 40. [21] Григорьев В. И., Григорьева Е. В. Деп. ВИНИТИ № 3414-82, 1982. [22] Blackett M. S. Nature, 1947, 159, p. 658; Phyl. Trans. R. Soc. A., 1947, 245, p. 309.

Поступила в редакцию
12.02.85

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1986, т. 27, № 2

УДК 519.21

ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОЙ РЕДУКЦИИ ИЗМЕРЕНИЙ В ФИЗИЧЕСКОМ ЭКСПЕРИМЕНТЕ

П. В. Голубцов, Ю. П. Пытьев, А. И. Чуличков

(кафедра математики)

Рассмотрим схему измерений сигнала f с помощью прибора A:

$$\xi = Af + \nu. \qquad (1)$$

Здесь ξ — результат измерения выходного сигнала Af прибора A, на вход которого подан сигнал f. Измерения сигнала f сопровождаются шумом ν. Методы редукции сигнала ξ к виду, какой имел бы сигнал f при измерении на приборе достаточно высокого качества, рассмотрен в работе [1]. В работе [2] найдено апостериорное распределение гауссовского вектора f из измерений по схеме (1) с гауссовским шумом ν и рассмотрены вопросы планирования измерений для наилучшего уточнения f. Настоящая работа посвящена построению оптимальных методов измерений вектора f по схеме (1), т. е. синтезу оператора A, для достижения наилучшего результата редукции измерений (1) к идеальному прибору. Априорные сведения об исследуемом сигнале f и шуме ν заданы в виде их математических ожиданий $Ef = f_0$ и $E\nu = 0$ и корреляционных операторов F и Σ. Иными словами, если векторы f и ν записаны в некоторых базисах, то известны математические ожидания, дисперсии и ковариации координат векторов f и ν в этих базисах. Будем считать, что взаимная корреляция между векторами f и ν отсутствует.

Задача редукции. Пусть в схеме (1) сигнал f — случайный вектор евклидова пространства $\mathcal{R}$ размерности N; ξ и ν — случайные векторы евклидова пространства $\tilde{\mathcal{R}}$ размерности $n \leqslant N$; $A \in (\mathcal{R} \to \tilde{\mathcal{R}})$ — линейный оператор, действующий из $\mathcal{R}$ в $\tilde{\mathcal{R}}$. Требуется построить линейное