СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Sutherlend W. Terrestr. Magn. and Atm. Elec., 1903, **8**, p. 49; 1904, **9**, p. 167. [2] Лебедев П. Н. Журн. Русск. физ.-хим. о-ва, часть физ., 1911, **45**, с. 484. [3] Swann W., Langacre F. G. J. Franklin Inst., 1928, **205**, N 4, p. 421. [4] Shiff L. I., Barnhill M. V. Phys. Rev., 1966, **151**, p. 1067. [5] Dessler A. J., Michel F. G., Rorschach H. E., Trammel G. T. Phys. Rev., 1968, **166**, p. 777. [6] Iriger T. Phys. Rev. B, 1970, **2**, p. 825. [7] Leung M. C. Nuovo Cim., 1972, **7**, p. 220. [8] Kumar N., Nadini R. Phys. Rev. D, 1973, **7**, p. 3586. [9] Френкель Я. И. Изв. АН СССР, сер. физ., 1947, **11**, с. 607. [10] Яновский Б. М. Земной магнетизм. Л.: Изд-во ЛГУ, 1978. [11] Джекобс Дж. Земное ядро. М.: Мир, 1979. [12] Моффат Г. Возбуждение магнитного поля в проводящей среде. М.: Мир, 1980. [13] Брагинский С. И. Итоги науки и техники. Магнетизм планет, 1980, **5**, с. 96. [14] Долгинов Ш. Ш. Там же, 1980, **5**, с. 31. [15] Долгинов Ш. Ш. Там же, 1982, **18**, с. 3. [16] Григорьев В. И., Григорьева Е. В. Препринт № 4/1980 физ. фак. МГУ. М., 1980. [17] Васильев Б. В. Препринт ОИЯИ Р 14-84-406. Дубна, 1984. [18] Васильев Б. В. Препринт ОИЯИ Р 14-84-255. Дубна, 1984. [19] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. М.: Наука, 1964. [20] Григорьев В. И., Григорьева Е. В. Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон., 1984, **25**, № 2, с. 40. [21] Григорьев В. И., Григорьева Е. В. Деп. ВИНИТИ № 3414-82, 1982. [22] Blackett M. S. Nature, 1947, **159**, p. 658; Phyl. Trans. R. Soc. A., 1947, **245**, p. 309.

Поступила в редакцию
12.02.85

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1986, т. 27, № 2

УДК 519.21

ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОЙ РЕДУКЦИИ ИЗМЕРЕНИЙ В ФИЗИЧЕСКОМ ЭКСПЕРИМЕНТЕ

П. В. Голубцов, Ю. П. Пытьев, А. И. Чуличков

(кафедра математики)

Рассмотрим схему измерений сигнала f с помощью прибора A:

$$\xi = Af + \nu. \tag{1}$$

Здесь ξ — результат измерения выходного сигнала Af прибора A, на вход которого подан сигнал f. Измерения сигнала f сопровождаются шумом ν. Методы редукции сигнала ξ к виду, какой имел бы сигнал f при измерении на приборе достаточно высокого качества, рассмотрен в работе [1]. В работе [2] найдено апостериорное распределение гауссовского вектора f из измерений по схеме (1) с гауссовским шумом ν и рассмотрены вопросы планирования измерений для наилучшего уточнения f. Настоящая работа посвящена построению оптимальных методов измерений вектора f по схеме (1), т. е. синтезу оператора A, для достижения наилучшего результата редукции измерений (1) к идеальному прибору. Априорные сведения об исследуемом сигнале f и шуме ν заданы в виде их математических ожиданий $Ef = f_0$ и $E\nu = 0$ и корреляционных операторов F и Σ. Иными словами, если векторы f и ν записаны в некоторых базисах, то известны математические ожидания, дисперсии и ковариации координат векторов f и ν в этих базисах. Будем считать, что взаимная корреляция между векторами f и ν отсутствует.

Задача редукции. Пусть в схеме (1) сигнал f — случайный вектор евклидова пространства $\mathscr{R}$ размерности N; ξ и ν — случайные векторы евклидова пространства $\widetilde{\mathscr{R}}$ размерности $n \leqslant N$; $A \in (\mathscr{R} \to \widetilde{\mathscr{R}})$ — линейный оператор, действующий из $\mathscr{R}$ в $\widetilde{\mathscr{R}}$. Требуется построить линейное

преобразование сигнала ξ к виду, какой он имел бы при измерении на приборе, ближайшем к идеальному $I \in (\mathcal{R} \to \mathcal{R})$ на заданном классе сигналов $\{f\} \in \mathcal{R}$. Эта задача подробно обсуждается в [3]; результат преобразования ξ имеет вид $R(\xi - Af_0) + f_0$, где $R \in (\tilde{\mathcal{R}} \to \mathcal{R})$ — линейный оператор, являющийся решением задачи на минимум

$$\inf \{E\|R'(\xi - Af_0) - (f - f_0)\|^2, \ R' \in (\tilde{\mathcal{R}} \to \mathcal{R})\}. \tag{2}$$

Решение задачи (2) при обратимом операторе $AFA^* + \Sigma$, согласно [3]: $R = FA^*(AFA^* + \Sigma)^{-1}$, и при этом точная нижняя грань в (2) равна

$$\operatorname{Tr} F - \operatorname{Tr} FA^*(AFA^* + \Sigma)^{-1}AF \tag{3}$$

и определяет погрешность редукции.

Пусть для измерения сигналов f по схеме (1) есть возможность выбора оператора (прибора) A из некоторого множества приборов $\mathcal{A} \subset (\mathcal{R} \to \tilde{\mathcal{R}})$. Рассмотрим, как следует выбирать оператор $A \in \mathcal{A}$ для того, чтобы результат редукции был наилучшим. Результат редукции считается тем лучше, чем меньше значение точной нижней грани (3) функционала, минимизируемого в (2). Рассматриваемая задача имеет важное практическое применение, например, при построении сложных комплексов исследования полей температуры, влажности и интенсивности электромагнитного излучения в системе «Земля—атмосфера». В результате многочисленных исследований накоплен экспериментальный материал о средних значениях, дисперсиях и корреляциях для этих полей [4]. Эти статистические данные необходимо учитывать при выборе параметров комплекса, таких как спектральная полоса каналов измерения интенсивности на верхней границе атмосферы, вид аппаратных функций (спектральной чувствительности) приемников и т. п. Проблема рассматривается в рамках теории второго порядка, что не требует знания законов распределения вероятностей векторов f и ν.

Задача синтеза оптимальной модели измерений. Итак, рассматриваемая проблема формально сводится к вариационной задаче

$$\begin{aligned} &\inf \{E\|R(\xi - Af_0) - (f - f_0)\|^2 \mid A \in \mathcal{A}\} = \\ &= \inf \{\operatorname{Tr} F - \operatorname{Tr} FA^*(AFA^* + \Sigma)^{-1}AF \mid A \in \mathcal{A}\}, \end{aligned} \tag{4}$$

где $\mathcal{A} \subset (\mathcal{R} \to \tilde{\mathcal{R}})$ — допустимое множество приборов, а R — решение вариационной задачи (2). Запишем задачу (4) в виде, более удобном для исследования:

$$\begin{aligned} &\inf \{E\|R(\xi - Af_0) - (f - f_0)\|^2 \mid R \in (\tilde{\mathcal{R}} \to \mathcal{R}), \ A \in \mathcal{A}\} = \\ &= \inf \{\|(RA - I)F^{1/2}\|_2^2 + \|R\Sigma^{1/2}\|_2^2 \mid R \in (\tilde{\mathcal{R}} \to \mathcal{R}), \ A \in \mathcal{A}\}. \end{aligned} \tag{5}$$

Приведем некоторые примеры решения задачи (5).

1°. Рассмотрим задачу исследования поля излучения Земли в N спектральных диапазонах; f_i — значение интенсивности излучения в i-м спектральном диапазоне, $i = 1, \ldots, N$. Пусть, однако, измерения могут проводиться лишь с помощью $n \leqslant N$ измерительных приборов. Требуется выбрать такие диапазоны длин волн, чтобы достигнуть наивысшей возможной точности в значениях всех N интенсивностей $f_1, \ldots, f_N$. Относительно значения f_i известны математические ожидания $Ef_i = f_{i,0}$ и ковариации $\operatorname{cov}(f_i, f_j) = F_{ij}$, и матрица F обратима. То-

гда в вариационной задаче (5) известны $\Sigma = 0$, $Ef = f_0$, $F > 0$, и множество $\mathscr{A}$ допустимых операторов A состоит из таких операторов, матрицы которых в базисе, в котором записан ранее вектор f, имеют диагональный вид с единицами, стоящими на месте с номером i_k, если координата f_{i_k} измеряется в схеме (1), $k=1,\ldots,n$, и нулями на остальных. (Аналогичная задача для гауссовских векторов рассмотрена в работе [2].)

Вариационная задача (5) принимает вид

$$\inf\{\|(RA-\mathrm{I})F^{1/2}\|_2^2 \,|\, R\in(\widetilde{\mathscr{R}}\to\mathscr{R}),\quad A\in\mathscr{A}\subset(\mathscr{R}\to\widetilde{\mathscr{R}})\}. \tag{6}$$

Варьируя функционал по R, получим необходимое условие минимума:

$$(RA-I)FA^* = 0, \tag{7}$$

или $RSS^* = F^{1/2}S^*$, где $S = AF^{1/2}$. Согласно [3], общее решение этого уравнения $R = F^{1/2}S^- + Z(I-SS)^-$, где S^- — псевдообратный к S, а $Z\in(\widetilde{\mathscr{R}}\to\mathscr{R})$ — произвольный операторы. Минимизируемый функционал принимает вид $\mathrm{Tr}\,F - \mathrm{Tr}\,FS^-S$ и не зависит от Z. Для дальнейшего решения задачи воспользуемся следующим утверждением.

Лемма 1. Пусть $F>0$ и $A\geqslant 0$ — самосопряженные операторы, имеющие в некотором базисе матрицы

$$A=\begin{pmatrix} I & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad F=\begin{pmatrix} F_{11} & F_{12}\\ F_{21} & F_{22}\end{pmatrix}.$$

Тогда

$$(AF^{1/2})^- = F^{-1/2}\begin{pmatrix} I & 0\\ F_{21}F_{11}^{-1} & 0\end{pmatrix}.$$

Сформулируем теперь теорему, определяющую решение задачи (6).

Теорема 1. Пусть $(g_1,\ldots,g_N)\subset\mathscr{R}$ — ортонормированный базис, в котором матрицы операторов A и F имеют вид

$$A=\begin{pmatrix} I_n & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad F=\begin{pmatrix} F_{11} & F_{12}\\ F_{21} & F_{22}\end{pmatrix},$$

а ортонормированный базис $g_{\varphi(1)},\ldots,g_{\varphi(N)}$ получен из $g_1,\ldots,g_N$ перестановкой векторов, и в этом базисе матрица оператора F имеет вид

$$F^{\varphi}=\begin{pmatrix} F_{11}^{\varphi} & F_{12}^{\varphi}\\ F_{21}^{\varphi} & F_{22}^{\varphi}\end{pmatrix},$$

причем $\mathrm{Tr}\,F_{22} - \mathrm{Tr}\,F_{21}F_{11}^{-1}F_{12} = \inf\{\mathrm{Tr}\,F^{\varphi}_{22} - \mathrm{Tr}\,F^{\varphi}_{21}(F^{\varphi}_{11})^{-1}F^{\varphi}_{12}\,|\,\varphi\in\mathscr{F}\}$, где $\mathscr{F}$ — класс всех взаимно однозначных отображений множества $(1, 2,\ldots,N)$ на себя. Тогда

A и $R=\begin{pmatrix} I & 0\\ F_{21}F_{11}^{-1} & 0\end{pmatrix}$ — решение задачи (6).

2°. Пусть теперь при измерениях интенсивности излучения можно измерять линейные комбинации излучения на разных длинах волн, используя, например, широкополосные приемники с различными спектральными чувствительностями. Иными словами, речь идет об измерениях случайного вектора f по схеме $\xi = Af$, где $A\in(\mathscr{R}\to\widetilde{\mathscr{R}})$ — оператор ограниченного ранга: $\mathrm{rank}\,A\leqslant n$. Заметим, что по такой же схеме проводятся измерения вертикального профиля температуры и влажности атмосферы, характеристики атмосферных аэрозолей и другие параметры атмосферы. Требуется выбрать спектральные чувстви-

тельности приемников для достижения наилучшей редукции измерений ξ к значению тех или иных параметров подстилающей поверхности или атмосферы. В этом пункте, как и в предыдущем, речь идет о частной задаче измерений без погрешностей.

Учитывая (7), сформулируем рассматриваемую проблему следующим образом: определить оператор $S = AF^{1/2}$ из условия

$$\inf\{\|F^{1/2}(\tilde{S}-\tilde{S}-I)\|_2 \mid \operatorname{rank}\tilde{S} \leqslant n\} = \|F^{1/2}(S-S-I)\|_2. \qquad (8)$$

Решение задачи (8) дается следующей теоремой.

Теорема 2. Пусть $Fe_i = \varphi_i e_i$, $\varphi_1 \geqslant \varphi_2 \geqslant \ldots \geqslant \varphi_N > 0$. Решением задачи (8) являются операторы S, нуль-пространство которых является линейной оболочкой, натянутой на векторы $e_{n+1}, \ldots, e_N$: $\mathcal{N}(S) = \mathcal{L}(e_{n+1}, \ldots, e_N)$.

Как следует из теоремы 2, в качестве оптимального для редукции оператора A можно взять любой, удовлетворяющий требованию $\mathcal{N}(A) = \mathcal{L}(e_{n+1}, \ldots, e_N)$.

3°. Пусть теперь измерения в эксперименте, рассмотренном в предыдущем пункте, сопровождаются шумом ν с нулевым математическим ожиданием и невырожденным корреляционным оператором Σ, причем Σ не зависит от способов измерения вектора f, т. е. не зависит от A. Задача (5) приобретает вид

$$\inf\{\|(RA-I)F^{1/2}\|_2^2 + \|R\Sigma^{1/2}\|_2^2 \mid R \in (\tilde{\mathcal{R}} \to \mathcal{R}), \qquad (9)$$

$$A \in (\mathcal{R} \to \tilde{\mathcal{R}}),\ \operatorname{rank} A \leqslant n,\ \|A\|_2^2 \leqslant \delta\}.$$

Соотношение $\|A\|_2^2 \leqslant \delta$ выражает технологические ограничения на коэффициент усиления приборов A [2]. Решение задачи (9) определяется теоремой 3.

Теорема 3. Пусть $\{e_\mu\} \subset \mathcal{R}$ и $\{g_\mu\} \subset \tilde{\mathcal{R}}$ — ортонормированные базисы, удовлетворяющие условиям $\Sigma g_\mu = \sigma_\mu g_\mu$, $\mu = 1, \ldots, n$; $Fe_\mu = \varphi_\mu e_\mu$, $\mu = 1, \ldots, N$, упорядоченные так, что $0 < \sigma_1 \leqslant \sigma_2 \leqslant \ldots \leqslant \sigma_n$; $\varphi_1 \geqslant \varphi_2 \geqslant \ldots \geqslant \varphi_n > 0$. Тогда решение задачи (9) определяется равенствами

$$Ae_\mu = \alpha_\mu^{1/2} g_\mu, \quad \mu = 1, \ldots, n; \quad Ae_\mu = 0, \quad \mu = n+1, \ldots, N; \quad Rg_\mu = r_\mu^{1/2} e_\mu,$$

$\mu = 1, \ldots, n$, где

$$\alpha_\mu = \begin{cases} \sqrt{\sigma_\mu/\omega} - \sigma_\mu/\varphi_\mu, & \text{если } \varphi_\mu > \sqrt{\omega\sigma_\mu}, \\ 0, & \text{если } \varphi_\mu \leqslant \sqrt{\omega\sigma_\mu}; \end{cases}$$

$r_\mu = \omega\alpha_\mu/\sigma_\mu$, $\mu = 1, \ldots, n$; $\omega = \omega(\delta)$ — корень уравнения

$$\sum_{\mu:\varphi_\mu > \sqrt{\omega\sigma_\mu}} \left(\sqrt{\sigma_\mu/\omega} - \sigma_\mu/\varphi_\mu\right) = \delta.$$

Связь с результатами для гауссовских векторов. Заметим, что теоремы 1—3, приведенные в настоящей работе, совпадают с результатами, сформулированными для гауссовских векторов в работе [2], т. е. в рамках метода редукции дополнительная информация о нормальности распределения векторов f и ξ не приводит к улучшению результатов. Покажем, что ошибка $E\|R(\xi - Af_0) - (f - f_0)\|^2$ метода редукции является оценкой сверху для ошибок, возникающих при использовании методов оптимального среднеквадратичного оценивания

вектора f по измерениям ξ при известном совместном распределении случайных векторов f и ξ.

Пусть $f \in \mathscr{R}$, $\xi \in \widetilde{\mathscr{R}}$ — случайные векторы из евклидовых пространств $\mathscr{R}$ и $\widetilde{\mathscr{R}}$ соответственно, обладающие математическими ожиданиями $Ef = f_0$, $E\xi$, корреляционными операторами F_{ff}, $F_{\xi\xi} > 0$ и взаимным корреляционным оператором $F_{f\xi}$; $\varphi(x)$ — борелевская функция, заданная на $\widetilde{\mathscr{R}}$ со значениями в $\mathscr{R}$. Оптимальной среднеквадратичной оценкой называется случайный вектор $\varphi(\xi)$, такой, что

$$E\|\varphi(\xi) - f\|^2 = \inf\{E\|\varphi^*(\xi) - f\|^2 | \varphi^* \in \mathscr{B}_N\}. \tag{10}$$

Если $E\|f\|^2 < \infty$, то оптимальная среднеквадратичная оценка существует и является условным математическим ожиданием $E(f|\xi)$ [5]. Для гауссовского распределения условное математическое ожидание является линейной функцией ξ:

$$E(f|\xi) = R(\xi - E\xi) + Ef, \tag{11}$$

где $R = F_{f\xi}F_{\xi\xi}^{-1}$. Линейная оценка приводит к среднеквадратичной невязке, выражающейся в терминах корреляционных операторов

$$\inf\{E\|R(\xi - E\xi) - (f - f_0)\|^2 | R \in (\widetilde{\mathscr{R}} \to \mathscr{R})\} = \operatorname{Tr} F_{ff} - \operatorname{Tr} F_{f\xi}F_{\xi\xi}^{-1}F_{\xi f}.$$

Заметим, что $\inf\{E\|R(\xi - E\xi) - (f - f_0)\|^2 | R \in (\widetilde{\mathscr{R}} \to \mathscr{R})\} \geqslant \inf\{E\|\varphi^*(\xi) - f\|^2 | \varphi \in \mathscr{B}_N\}$ и точная верхняя грань функционала $\inf\{E\|\varphi^*(\xi) - f\|^2 | \varphi^* \in \mathscr{B}_N\}$ по всем совместным распределениям векторов f и ξ с фиксированными корреляционными операторами F_{ff}, $F_{\xi\xi}$, $F_{f\xi}$ достигается на гауссовском распределении. Следовательно, использование методов редукции для линейной схемы измерений (1) случайного вектора f сопровождается ошибкой $E\|R(\xi - E\xi) - (f - f_0)\|^2$, являющейся оценкой сверху для ошибок, возникающих при использовании в качестве оценки f условного математического ожидания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Пытьев Ю. П. Матем. сб., 1983, **120(162)**, № 3, с. 241. [2] Голубцов П. В., Пытьев Ю. П., Чуличков А. И. Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон., 1985, **26**, № 6, с. 17. [3] Пытьев Ю. П. Матем. сб., 1982, **118(160)**, № 1 (5), с. 19. [4] Малкевич М. С. Оптические исследования атмосферы со спутников. М.: Наука, 1973. [5] Ширяев А. Н. Вероятность. М.: Наука, 1980.

Поступила в редакцию
13.02.85

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1986, т. 27, № 2

УДК 530.145

ЭФФЕКТИВНЫЙ ЛАГРАНЖИАН ДЛЯ БЕЗМАССОВЫХ КВАРКОВ ВО ВНЕШНЕМ НЕАБЕЛЕВОМ ХРОМОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

Б. В. Магницкий, А. В. Татаринцев

(кафедра теоретической физики)

1. В последнее время уделялось большое внимание исследованию влияния температурных эффектов в калибровочных теориях. Изучение процессов при ненулевых температурах связывают, прежде всего, с возможностью существования фазовых переходов в теориях с нетри-