вектора f по измерениям ξ при известном совместном распределении случайных векторов f и ξ.

Пусть $f \in \mathscr{R}$, $\xi \in \tilde{\mathscr{R}}$ — случайные векторы из евклидовых пространств $\mathscr{R}$ и $\tilde{\mathscr{R}}$ соответственно, обладающие математическими ожиданиями $Ef = f_0$, $E\xi$, корреляционными операторами F_{ff}, $F_{\xi\xi} > 0$ и взаимным корреляционным оператором $F_{f\xi}$; $\varphi(x)$ — борелевская функция, заданная на $\tilde{\mathscr{R}}$ со значениями в $\mathscr{R}$. Оптимальной среднеквадратичной оценкой называется случайный вектор $\varphi(\xi)$, такой, что

$$E\|\varphi(\xi) - f\|^2 = \inf\{E\|\varphi^*(\xi) - f\|^2 | \varphi^* \in \mathscr{B}_N\}. \qquad (10)$$

Если $E\|f\|^2 < \infty$, то оптимальная среднеквадратичная оценка существует и является условным математическим ожиданием $E(f|\xi)$ [5]. Для гауссовского распределения условное математическое ожидание является линейной функцией ξ:

$$E(f|\xi) = R(\xi - E\xi) + Ef, \qquad (11)$$

где $R = F_{f\xi}F_{\xi\xi}^{-1}$. Линейная оценка приводит к среднеквадратичной невязке, выражающейся в терминах корреляционных операторов

$$\inf\{E\|R(\xi - E\xi) - (f - f_0)\|^2 | R \in (\tilde{\mathscr{R}} \to \mathscr{R})\} = \operatorname{Tr} F_{ff} - \operatorname{Tr} F_{f\xi}F_{\xi\xi}^{-1}F_{\xi f}.$$

Заметим, что $\inf\{E\|R(\xi - E\xi) - (f - f_0)\|^2 | R \in (\tilde{\mathscr{R}} \to \mathscr{R})\} \geqslant \geqslant \inf\{E\|\varphi^*(\xi) - f\|^2 | \varphi \in \mathscr{B}_N\}$ и точная верхняя грань функционала $\inf\{E\|\varphi^*(\xi) - f\|^2 | \varphi^* \in \mathscr{B}_N\}$ по всем совместным распределениям векторов f и ξ с фиксированными корреляционными операторами F_{ff}, $F_{\xi\xi}$, $F_{f\xi}$ достигается на гауссовском распределении. Следовательно, использование методов редукции для линейной схемы измерений (1) случайного вектора f сопровождается ошибкой $E\|R(\xi - E\xi) - (f - f_0)\|^2$, являющейся оценкой сверху для ошибок, возникающих при использовании в качестве оценки f условного математического ожидания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Пытьев Ю. П. Матем. сб., 1983, **120(162)**, № 3, с. 241. [2] Голубцов П. В., Пытьев Ю. П., Чуличков А. И. Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон., 1985, **26**, № 6, с. 17. [3] Пытьев Ю. П. Матем. сб., 1982, **118(160)**, № 1 (5), с. 19. [4] Малкевич М. С. Оптические исследования атмосферы со спутников. М.: Наука, 1973. [5] Ширяев А. Н. Вероятность. М.: Наука, 1980.

Поступила в редакцию
13.02.85

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1986, т. 27, № 2

УДК 530.145

ЭФФЕКТИВНЫЙ ЛАГРАНЖИАН ДЛЯ БЕЗМАССОВЫХ КВАРКОВ ВО ВНЕШНЕМ НЕАБЕЛЕВОМ ХРОМОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

Б. В. Магницкий, А. В. Татаринцев

(кафедра теоретической физики)

1. В последнее время уделялось большое внимание исследованию влияния температурных эффектов в калибровочных теориях. Изучение процессов при ненулевых температурах связывают, прежде всего, с возможностью существования фазовых переходов в теориях с нетри-

виальным вакуумом. Такие переходы, восстанавливающие спонтанно нарушенную симметрию, приводят к важным следствиям для различных аспектов адронной физики, космологии и т. д. [1]. В ряде работ [2—5] были развиты методы для оценки критической температуры фазовых переходов и вычисления термодинамических параметров в калибровочных теориях.

В рамках этих исследований представляет особый интерес изучение свойств кварк-глюонной плазмы. Существование такой плазмы предполагает нарушение конфайнмента при высоких плотностях и температурах и связано с моделью существования адронов как конденсата кварк-глюонной плазмы.

В настоящей работе в однопетлевом приближении вычислен Ω-потенциал кварк-антикварковой плазмы во внешнем хромомагнитном поле, задаваемом потенциалами

$$A_\mu^1 = (0, \sqrt{\lambda}, 0, 0), \ A_\mu^2 = (0, 0, \sqrt{\lambda}, 0), \ A_\mu^3 = 0; \tag{1}$$

$$A_\mu^1 = (0, \sqrt{\lambda}, 0, 0), \ A_\mu^2 = (0, 0, \sqrt{\lambda}, 0), \ A_\mu^3 = (0, 0, 0, \sqrt{\lambda}). \tag{2}$$

Потенциалы типа (1) описывают постоянное цветное магнитное поле, направленное вдоль третьей изотопической оси $H_i^3 = g\lambda\delta_i^3$, а (2) задают комбинацию трех взаимно ортогональных в изотопическом пространстве и пространстве Минковского магнитных полей $H_i^a = g\lambda\delta_i^a$. Такие поля являются решением уравнений Янга—Миллса с постоянным цветным током

$$D_\mu F^a_{\mu\nu} = J_\nu^a.$$

2. Используя общий формализм, развитый в ряде работ, например [6—8], получим в однопетлевом приближении Ω-потенциал для безмассовых ($m = 0$) частиц со спином $s = 0$ и изоспинами $I = 1/2$, 1. Приближение безмассовых «кварков» означает, как это будет видно в дальнейшем, большую интенсивность внешних полей и малую массу кварков $gH \gg m^2$. Рассмотрение плазмы безмассовых скалярных кварков представляет интерес в связи с изучением вопроса о существовании суперсимметричных партнеров кварков [9, 10].

Как известно, большая статистическая сумма квантовых полей представляет собой амплитуду вероятности перехода вакуум—вакуум в евклидовой квантовой теории поля

$$Z = \exp(-\beta\Omega) = \exp(S_\beta),$$

где S_β — эффективное евклидово действие для частиц во внешнем классическом поле, β — обратная температура ($\beta = 1/T$). При нулевом химическом потенциале плотность свободной энергии

$$F = \Omega/V = -S_\beta/(\beta V),$$

где $F = F^{(0)} + F^{(1)} + \ldots$, а $F^{(0)} = H^2/2$; $F^{(1)}$ соответствует однопетлевому приближению теории: $F^{(1)} = -S_\beta^{(1)}/(\beta V)$,

$$\beta\Omega_{s,I}^{(1)} = K_{s,I} \ln\det G_{s,I}^{-1}(p). \tag{3}$$

Здесь индексы s, I означают соответственно спин и изоспин частицы, а коэффициент $K_{s,I}$ принимает значения $K_{0,1/2} = 1$ и $K_{0,1} = 1/2$ для комплексных и действительных бозонов. В формуле (3) проведена замена $p_4 = 2\pi n/\beta$ $(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Интегрирование по p_4 заменено на суммирование по формуле

$$\int \frac{dp_4}{2\pi} \to \frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty}.$$

Учитывая явный вид пропагаторов для случая $m^2 = 0$:

$$G_{0,1/2}^{-1}(p) = \left(p_\mu - \frac{1}{2} g\tau^a A_\mu^a\right)^2,$$

$$G_{0,1}^{-1}(p) = p^2 - 2ig\varepsilon^{abc} A_\mu^b p^\mu - g^2 \varepsilon_{abk}\varepsilon_{cdk} A_b^\mu A_{d\mu},$$

где τ^a — матрицы Паули, выражение для однопетлевой поправки к плотности свободной энергии $F^{(1)}$ принимает вид

$$F_{s,I}^{(1)} = -\frac{K_{s,I}}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \operatorname{Tr} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \exp(-sG_{s,I}^{-1}(p)).$$

Для внешнего поля, заданного потенциалами (1), легко получить явный вид для $F_{s,I}^{(1)}$:

$$F_{0,1/2}^{(1)} = -L_{0,1/2}^{(1)} = -\frac{2}{\beta} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-s(p^2+gH/2)} \operatorname{ch}\left(s\sqrt{gH p_\perp^2}\right) \theta_3\left(\frac{4\pi s}{\beta^2}\right),$$

$$F_{0,1}^{(1)} = -L_{0,1}^{(1)} = -\frac{1}{2\beta} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-s(p^2+gH)} \left[1 + 2e^{-sgH/2} \times\right.$$

$$\left.\times \operatorname{ch}\left(s\sqrt{\left(\frac{gH}{2}\right)^2 + 4gHp_\perp^2}\right)\right] \theta_3\left(\frac{4\pi s}{\beta^2}\right),$$

что совпадает с результатом [8], если положить $m^2 = 0$. Здесь $p^2{}_\perp = p_1{}^2 + p_2{}^2$, а $\theta_3(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-\pi n^2 x)$ — тэта-функция Якоби. Используя свойства тэта-функции Якоби для не зависящей от температуры части (обозначим ее $F_{s,I}^{(1)}(H)$), получим перенормированные выражения [11]:

$$F_{0,1/2}^{(1)}(H)_{\text{ren}} = -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} \left\{e^{-sgH/2} + \frac{\sqrt{\pi sgH}}{2} e^{-sgH/4} \Phi\left(\frac{\sqrt{sgH}}{2}\right) - \right.$$

$$\left. - \theta_0\left(\frac{1}{\mu^2} - s\right)\left[1 - \frac{(sgH)^2}{24}\right]\right\}, \tag{4}$$

$$F_{0,1}^{(1)}(H)_{\text{ren}} = -\frac{1}{32\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} \left\{2e^{-sgH} + e^{-2sgH} + \sqrt{\pi sgH}\, e^{-\frac{7}{16}sgH} \times\right.$$

$$\left.\times \left[\Phi\left(\frac{3}{4}\sqrt{sgH}\right) + \Phi\left(\frac{5}{4}\sqrt{sgH}\right)\right] - \theta_0\left(\frac{1}{\mu^2} - s\right)\left[3 - \frac{(sgH)^2}{3}\right]\right\}, \tag{5}$$

где $\Phi(x)$ — функция ошибок, а $\theta_0(x)$ — ступенчатая функция, $\theta_0(x) = 0$ при $x < 0$ и $\theta_0(x) = 1$ при $x \geqslant 0$. Выражения (4), (5) являются точными. Оставляя существенную логарифмическую зависимость $F_{s,l}^{(1)}$, получим

$$F_{0,1/2}^{(1)}(H)_{\text{ren}} = -L_{0,1/2}^{(1)}(H)_{\text{ren}} = -\frac{4}{3}\frac{(gH)^2}{(16\pi)^2}\left[\ln\frac{gH}{\mu^2} + \text{const}\right], \quad (6)$$

$$F_{0,1}^{(1)}(H)_{\text{ren}} = -L_{0,1}^{(1)}(H)_{\text{ren}} = -\frac{16}{3}\frac{(gH)^2}{(16\pi)^2}\left[\ln\frac{gH}{\mu^2} + \text{const}\right]. \quad (7)$$

Обозначив неперенормированные величины индексом 0, для перенормированных значений поля и заряда в (6), (7) получим

$$H^2 = H_0^2(1 + C_{s,l}g_0^2\ln\Delta^2/\mu^2), \quad g^2 = g_0^2(1 + C_{s,l}g_0^2\ln\Delta^2/\mu^2)^{-1},$$

где $C_{0,1/2} = -\frac{1}{6}\frac{1}{(4\pi)^2}$, $C_{0,1} = -\frac{1}{3}\frac{1}{(4\pi)^2}$, μ^2 — точка перенормировки.

Рассмотрим теперь случай ненулевых температур. Общие выражения для $\Delta F^{(1)}(\beta, H)$ имеют следующий вид:

$$\Delta F_{0,1/2}^{(1)}(\beta, H) = -\frac{1}{8\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{ds}{s^3}e^{-n^2\beta^2/(4s)}\left[e^{-sgH/2} - 1 + \frac{\sqrt{\pi sgH}}{2}e^{-sgH/4}\Phi\left(\frac{\sqrt{sgH}}{2}\right)\right], \quad (8)$$

$$\Delta F_{0,1}^{(1)}(\beta, H) = -\frac{1}{16\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{ds}{s^3}e^{-n^2\beta^2/(4s)}\left\{2e^{-sgH} + e^{-2sgH} - 3 + \sqrt{sgH\pi}\,e^{-(7/16)sgH}\left[\Phi\left(\frac{3}{4}\sqrt{sgH}\right) + \Phi\left(\frac{5}{4}\sqrt{sgH}\right)\right]\right\}. \quad (9)$$

Для (8), (9) можно получить точные выражения в виде рядов функций Бесселя мнимого аргумента:

$$\Delta F_{0,1/2}^{(1)}(T, H) = -\frac{T^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}\left\{\frac{gH}{2}K_2\left(\frac{n}{T}\sqrt{\frac{gH}{2}}\right) - \frac{gH}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \times \left(\frac{n\sqrt{gH}}{4T}\right)^k\frac{K_{k-2}(n\sqrt{gH}/(2T))}{(2k-1)(k-1)!}\right\}, \quad (10)$$

$$\Delta F_{0,1}^{(1)}(T, H) = -\frac{T^2}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}\left\{gHK_2\left(\frac{n}{T}\sqrt{gH}\right) + gHK_2\left(\frac{n}{T}\sqrt{2gH}\right) + \frac{7}{16}gH\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{5^{2k-1} + 3^{2k-1}}{4^{2k-1}}\left(\frac{2n\sqrt{gH}}{\sqrt{7}T}\right)^k\frac{K_{k-2}\left(\frac{n}{4T}\sqrt{7gH}\right)}{(2k-1)(k-1)!}\right\}. \quad (11)$$

Эти формулы соответствуют формулам (20а, б) работы [8] при $m^2 = 0$. Для получения асимптотик при больших температурах в работе [8] использовалось условие $gH \ll m^2 \ll T$, которое в нашем случае $(m^2 = 0)$ не выполняется, поэтому необходимо использовать несколько иные представления для формул (10), (11). Получим асимптотические разложения для величин $\Delta F_{s,l}^{(1)}(T, H)$ при $T^2 \gg gH$ и $T^2 \ll gH$.

Явный вид для первой поправки к плотности свободной энергии в области высоких температур $T^2 \gg gH$

$$F^{(1)}_{0,1/2}(T,\ H) = -\frac{2\pi^2}{45} T^4 + \frac{(gH)^2}{8\pi^2} \left(\frac{T}{\sqrt{gH}}\right) B \left(1 + O\left(\frac{\sqrt{gH}}{T}\right)\right), \tag{12}$$

$$F^{(1)}_{0,1}(T,\ H) = -\frac{\pi^2}{30} T^4 + \frac{(gH)^2}{16\pi^2} \left(\frac{T}{\sqrt{gH}}\right) D_1 - \frac{(gH)^2}{(4\pi)^3} D_2 + O\left(\frac{\sqrt{gH}}{T}\right),$$

а в области низких температур $T^2 \ll gH$

$$F^{(1)}_{0,1/2}(T,\ H) = -\frac{4}{3} \frac{(gH)^2}{(16\pi)^2} \left(\ln \frac{gH}{\mu^2} + \text{const}\right) +$$

$$+ \frac{(gH)^2}{16\pi\sqrt{2}} \left(\frac{T}{\sqrt{gH}}\right)^2 e^{-\sqrt{gH}/(2T)} \left(1 + O\left(\frac{T}{\sqrt{gH}}\right)\right),$$

$$F^{(1)}_{0,1}(T,\ H) = -\frac{(gH)^2}{6(4\pi)^2} \left(\ln \frac{gH}{\mu^2} + \text{const}\right) -$$

$$-\frac{\sqrt{14}\,(gH)^2}{32\pi} \left(\frac{T}{\sqrt{gH}}\right)^2 e^{-\sqrt{7gH}/(4T)} \left(1 + O\left(\frac{T}{\sqrt{gH}}\right)\right), \tag{13}$$

где B, $D_{1,2}$ — численные константы ~ 1. Из (12) и (13) видно, что для каждого приближения результаты, полученные для разных статистик ($s = 0$, $I = 1/2$ и $s = 0$, $I = 1$), различаются только числовыми коэффициентами. Следует отметить, что в (12) отсутствуют члены $\sim T^2$, которые имеются в соответствующих выражениях в [8] при $m^2 \neq 0$.

Для внешнего поля, заданного потенциалами (2), при рассматриваемых значениях спина и изоспина получаем

$$F^{(1)}_{0,1/2}(\beta,\ H) = -\frac{1}{16\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} \left[2e^{-sgH/2} + sgHe^{-sgH/2}\right] \theta_3\left(\frac{\beta^2}{4\pi s}\right),$$

$$F^{(1)}_{0,1}(\beta,\ H) = -\frac{1}{32\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} \left[e^{-2sgH} + 2e^{-sgH} + 4sgHe^{-sgH}\right] \theta_3\left(\frac{\beta^2}{4\pi s}\right).$$

Асимптотические значения плотности свободной энергии $F_{s,I}(T,\ H) = F^{(0)}_{s,I} + F^{(1)}_{s,I}$, где $F^{(0)}_{s,I} = H^2/2$, в области высоких температур $T^2 \gg gH$ имеют вид

$$F^{(1)}_{s,I}(T,\ H) = -\frac{\pi^2}{15} T^4 - (gH)^{3/2}\, T B_{s,I} \left[1 + O\left(\frac{\sqrt{gH}}{T}\right)\right], \tag{14}$$

а в области низких температур $T^2 \ll gH$

$$F^{(1)}_{0,1/2}(T,\ H) = -\frac{(gH)^2}{(4\pi)^2} \left[\ln \frac{gH}{\mu^2} + \text{const}\right] -$$

$$-D_3 (gH)^2 \left(\frac{T}{\sqrt{gH}}\right)^{3/2} e^{-\frac{1}{T}\sqrt{\frac{gH}{2}}} \left(1 + O\left(\frac{T}{\sqrt{gH}}\right)\right),$$

$$F^{(1)}_{0,1}(T,\ H) = -\frac{(gH)^2}{2(4\pi)^2} \left[\ln \frac{gH}{\mu^2} + \text{const}\right] -$$

$$-D_4 (gH)^2 \left(\frac{T}{\sqrt{gH}}\right)^{3/2} e^{-\frac{1}{T}\sqrt{gH}} \left(1 + O\left(\frac{T}{\sqrt{gH}}\right)\right), \tag{15}$$

где $B_{s,1}$, $D_{3,4}$ — числовые константы, μ^2 — точка перенормировки. Как легко видеть, результаты, полученные здесь для потенциалов (1), в случае «сильных» полей ($gH \gg T^2$) или малых температур совпадают в предельном случае $m^2 \ll gH$ с результатами [8], тогда как для $T^2 \gg gH$ имеется отличие, соответствующее случаю $T^2 \gg gH \gg m^2 \to 0$. Для полей типа (1) и (2), как это видно из (12), (13)—(15), структура плотности свободной энергии одинакова при $T^2 \gg gH$ и отличается лишь степенью предэкспоненты в «сильных» полях $gH \gg T^2$ и некоторыми числовыми множителями, в том числе и в показателе экспоненты. Более быстрое спадание температурных членов в случае $T^2 \to 0$ для потенциалов (2) отражает бóльшую по сравнению с (1) симметрию конфигураций полей (2) и, следовательно, бóльшую устойчивость относительно температурных флуктуаций, разрушающих основное поле (1) или (2).

По-видимому, общая взаимосвязь устойчивости относительно температурных флуктуаций и симметрии внешнего поля имеет место для более широкого класса потенциалов. Однако это требует более детального анализа и не является целью данной работы.

В заключение авторы благодарят В. Ч. Жуковского и А. С. Вшивцева за внимание к работе и обсуждение результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Киржниц Д. А. Письма в ЖЭТФ, 1972, **15**, с. 745; Kirzhnits D., Linde A. Phys. Lett., 1972, **42B**, p. 471. [2] Bernard C. Phys. Rev., 1974, **D9**, p. 3312. [3] Weinberg S. Ibid., p. 3357. [4] Dolan L., Jackiw R. Ibid., p. 3320. [5] Reuter M., Dittrich W. Phys. Lett., 1984, **B144**, p. 99. [6] Schwinger J. Phys. Rev., 1951, **82**, p. 664. [7] Dittrich W. Ibid., 1979, **D19**, p. 2383. [8] Агаев Ш. С., Вшивцев А. С., Жуковский В. Ч., Семенов О. Ф. В кн.: Проблемы физики высоких энергий и квантовой теории поля. Т. 1. Протвино, 1983, с. 188. [9] Игнатьев А. Ю., Кузьмин В. А., Шапошников М. Е. Письма в ЖЭТФ, 1984, **40**, с. 211. [10] Dimopoulos S., Georgy H. Nucl. Phys., 1981, **B193**, p. 150. [11] Nielsen N. K., Olesen P. Ibid., 1978, **B144**, p. 376.

Поступила в редакцию
25.02.85

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1986, т. 27, № 2

УДК 530.145

ХИГГСОВСКИЙ ВАКУУМ В ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

Г. А. Сарданашвили, Б. Л. Ихлов

(кафедра теоретической физики)

Описание эйнштейновского гравитационного поля в калибровочной теории гравитации как хиггс-голдстоуновского [1] ставит вопрос о существовании хиггсовского гравитационного вакуума в теории гравитации, аналогичного хиггсовскому вакууму в калибровочных моделях Большого объединения.

В теории поля введение внешнего классического хиггс-голдстоуновского поля σ моделирует нарушение симметрии вакуума. Это выражается в неинвариантности полных связных функций Грина с производящим функционалом

$$Z = N\int [d\varphi] \exp iS(\varphi, \sigma)$$

относительно группы G преобразований материальных полей φ. Эта неинвариантность обусловлена G-неинвариантностью действия $S(\varphi, \sigma)$ по полям φ за счет члена типа $\varphi\sigma\varphi$, которое, однако, G-инвариантно по φ и σ, т. е. G-ковариантно по φ (для определенности будем считать поле φ скалярным).

Хиггс-голдстоуновское поле представляет собой сумму $\sigma = \sigma_0 + \tau$ двух компонент: H-инвариантного хиггсовского поля σ_0, где H — подгруппа точных симметрий группы