более громоздким по сравнению с первым, он может оказаться более эффективным при расчете параметров узких резонансов. Отметим, наконец, что рассмотренные методы легко могут быть обобщены на случай рассеяния релятивистских частиц (поскольку задача решается в импульсном представлении), если воспользоваться уравнениями квазипотенциального типа [9, 10].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Ball J. S. et al. Phys. Rev. Lett., 1972, 28, р. 1143. [2] Сафронов А.Н. Письма в ЖЭТФ, 1983, 37, с. 608. [3] Ментковский Ю. Л. Частица в ядернокулоновском поле. М.: Энергоиздат, 1982. [4] Блохинцев Л.Д., Сафронов А.Н. Изв. АН СССР, сер. физ., 1983, 47, с. 2168. [5] К won Y. R., Тавакіп F. Phys. Rev. C, 1978, 18, р. 932. [6] Орлов Ю. В. Письма в ЖЭТФ, 1981, 33, с. 380. [7] Noyes H. P. Phys. Rev. Lett., 1965, 15, р. 538. [8] Kowalski K. W. Ibid., р. 798. [9] Logunov A. A., Tavkhelidze A. N. Nuovo Cim., 1963, 29, р. 380. [10] Blankenbecler R., Sugar R. Phys. Rev., 1966, 142, р. 1051.

Поступила в редакцию 13.02.85

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1986, т. 27, № 2

УДК 539.1.076.621.384.633.8

ФАЗОВОЕ ДВИЖЕНИЕ В КЛАССИЧЕСКОМ МИКРОТРОНЕ ВБЛИЗИ НЕЛИНЕЙНЫХ РЕЗОНАНСОВ

В. К. Гришин, М. А. Сотников, В. И. Шведунов

(кафедра ядерных взаимодействий и ускорителей)

1. В настоящее время во многих научных лабораториях разрабатываются и реализуются проекты электронных ускорителей нового поколения с высоким качеством пучка: энергия частиц до 100 МэВ (первый этап; второй этап — энергия 2—4 ГэВ), ток до 100 мкА, энергетический разброс до ~10⁻⁴, эмиттанс около 0,05π мм мрад, коэффициент заполнения рабочего цикла 1 [1, 2]. Создание ускорителей с указанными параметрами имеет исключительно важное значение для дальнейшего прогресса в исследовании структуры атомного ядра с помощью электро- и фотоядерных реакций [3, 4] и открывает широкие возможности для разнообразных прикладных исследований.

Ускорители этого типа конструируются по схеме рециркуляторов (рециклотрон, разрезной микротрон и т. д. [5-7]), позволяющих получить требуемые энергии электронов при относительно небольшом числе рециркуляций пучка. Одним из основных этапов разработки рециркуляторов является анализ фазового движения, т. е. динамики частиц с ускоряющим полем. Фазовое движение в взаимодействия классическом микротроне впервые было исследовано в [8], а в дальнейшем — в работах [9, 10]. Успешное использование микротронов свидетельствует, что в целом фазовое движение хорошо изучено. Вместе с тем разработка ускорителя с более высоким качеством пучка, предназначенного для проведения экспериментов повышенного класса точности, предполагает проведение самого детального исследования фазового движения. Действительно, тщательный теоретический и экспериментальный анализ выявил ряд интересных особенностей, позволяющих более обоснованно оценить необходимые параметры и допуски установки для получения пучка с разбросом по энергии $\delta E/E pprox$ $\approx 10^{-4}$.

:26

Из-за нелинейного характера фазовых колебаний детальный анализ области фазовой устойчивости в рециркуляционных ускорителях может быть проведен только численно, однако ряд физических закономерностей может быть понят на основе аналитического описания. Нелинейному исследованию (аналитическому и численному) фазового движения в классическом микротроне и посвящена настоящая работа, она является необходимой базой для рассмотрения работы рециркуляторов более сложного типа.

2. Фазовое движение частиц в микротроне с бесконечно тонким ускоряющим промежутком описывается системой разностных уравнений (ср. [8])

$$x_{n+1} = x_n + y_n,$$

$$y_{n+1} = y_n + 2\pi (\cos(\varphi_s + x_{n+1}) / \cos \varphi_s - 1), \qquad (1)$$

где n — номер орбиты, φ_s — равновесная фаза, x_n — отклонение фазы от равновесной в момент пролета частицей резонатора на n-й орбите, $y_n = 2\pi \delta E_n/E_n$, δE_n — отклонение энергии от равновесного значения E_n на n-й орбите. Поскольку нелинейность в системе (1) определяется исключительно величиной x_{n+1} , целесообразно исключить y_n . В этом случае система (1) может быть преобразована в нелинейное разностное уравнение. Разлагая соз ($\varphi_s + x_{n+1}$) в ряд по степеням x_n в окрестности точки φ_s и ограничиваясь кубическим членом, получаем

$$x_{n+2} - 2(1 - \pi \operatorname{tg} \varphi_s) x_{n+1} + x_n = F(x_{n+1}) = -\pi x^2_{n+1} + (\pi/3) \operatorname{tg} \varphi_s x^3_{n+1} + \dots$$
(2)

В линейном приближении частота фазовых колебаний Q определяется соотношением $\cos Q = 1 - \pi \operatorname{tg} \varphi_s$ ($0 < Q < \pi$), из которого определяется область устойчивости: $0 < \varphi_s < \operatorname{arctg} (2/\pi) = 32,5^\circ$. Заметим, что при $\pi \operatorname{tg} \varphi_s|_{\max} \approx 2$ следующий член в разложении (2) имеет на порядок меньшую величину.

Для нахождения решения (2) воспользуемся методом последовательных приближений [11]. Решение (1), (2) ищем в виде

$$x_n = A_n e^{iQn} + \kappa. c., \quad x_{n+1} = (A_n + \Delta A_n) e^{iQ(n+1)} + \kappa. c., \quad y_n = x_{n+1} - x_n,$$

где $\Delta A_n = F(x_{n+1}) e^{-iQ(n+1)}/(2i \sin Q)$. (3) Очевидно, что любые возмущения (а не только нелинейные в идеальной системе (3)) заметны тем больше, чем меньше величина sin Q. Именно поэтому, в частности, целесообразно в первую очередь исследовать центральную зону области устойчивости $0 < \varphi_s < \varphi_{s_{max}}$. Следуя (3), после ряда упрощений получим

$$\Delta A_n = \frac{e^{-iQ(n+1)}}{2i\sin Q} \left\{ -b \left(A_n e^{iQ(n+1)} + \kappa. \ c. \right)^2 + c \left(A_n e^{iQ(n+1)} + \kappa. \ c. \right)^3 \right\}, \quad (4)$$

где $b = \pi$, $c = \pi \operatorname{tg} \varphi_s/3$. В правой части (4) возникают множители, содержащие $\exp \{iQm(n+1)\}$, где $m = 0, \pm 1, \ldots$ Учитывая, что эволюция A_n зависит от суммирования ΔA_n , нетрудно видеть, что итоговый результат будет в основном определяться членами с ненулевыми средними значениями слагаемых в $F(x_{n+1})$. Это возможно, если $Qm \cong \cong 2\pi$, где m целое число. Таким образом, помимо линейных резонансов $Q = \pi$ (возмущение особенно велико из-за условия $\sin Q \rightarrow 0$), появляются дополнительные нелинейные резонансные члены со значением $Q = 2\pi/3, 2\pi/4, \ldots$ Кроме того, в (4) существуют члены, не содержащие экспонент с Q. Величина резонансных членов в F опреде-

27

ляется самой амплитудой, которая является достаточно малой (для достижения энергетической однородности пучка $\sim 10^{-4}$ колебания фазы не должны превышать нескольких градусов, т. е. $x_n < 0, 1$). Поэтому наиболее опасным является резонанс $Q = 2\pi/3$ ($\varphi_s = 25,52^\circ$), в котором возмущение в F имеет порядок bA^2 .

Как отмечено в [12], резонанс $2\pi/3$ проявляется настолько сильно, что интенсивность пучка в микротроне при выборе равновесной фазы в окрестности $Q = 2\pi/3$ резко падает даже для небольшого числа орбит. В связи с этим резонанс $2\pi/3$ достаточно подробно анализировался. Этот резонанс лежит достаточно далеко от центра полосы $Q = \pi/2$ ($\varphi_s = 17,66^\circ$). Поэтому сначала рассмотрим центральную область.

3. Итак, пусть $Q = \pi/2 + \delta$, где δ — расстройка. Тогда во втором приближении теории возмущений

$$\Delta A_n = -i |A_n|^2 A_n \alpha_1 + i \alpha_2 A_n^{*3} e^{-3iQ(n+1)},$$

где (ср. [12])

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\pi^2}{2\sin Q} \left\{ \frac{1 + 4\cos Q}{2\sin (Q/2)\sin (3Q/2)} + \mathrm{tg}\,\varphi_s/\pi \right\}, \\ \alpha_2 &= \frac{\pi^2}{2\sin Q} \left\{ \frac{1}{2\sin (Q/2)\sin (3Q/2)} - \mathrm{tg}\,\varphi_s/(3\pi) \right\}. \end{aligned}$$

Полагая, что $|\Delta A_n| \ll |A_n|$, заменим разностное выражение дифференциальным, а комплексную амплитуду представим в виде $A = ae^{in}$. В этом случае эволюция амплитуды описывается следующими укороченными уравнениями:

$$a' = a^3 a_2 \sin 4\omega, \ \omega' = -a^2 (a_1 - a_2 \cos 4\omega) + \delta.$$
 (5)

Решение системы (5) может быть получено в квадратурах с помощью эллиптических интегралов, но общий характер изменения амплитуды нетрудно установить с помощью первого интеграла системы. В канонически сопряженных переменных $I = a^2/2$ и $\omega = \eta + \delta n$

$$H_{1/2} = -I^2(\alpha_1 - \alpha_2 \cos 4\omega) + \delta I = \text{const.}$$
(6)

Здесь величина H_{1/2} имеет смысл гамильтониана переменных I и ю.

Исследуем более подробно (6). При $\delta < 0$ и в ближайшей окрестности справа от точки $Q = \pi/2$ ($\delta \ge 0$) сохраняется неравенство $\alpha_1 > \alpha_2$ и амплитуда $a = \sqrt{2I}$ остается ограниченной, испытывая в процессе изменения $\omega = \omega$ (*n*) биения с характерным масштабом $I/\sqrt{\delta}$. Именно это обстоятельство обычно и отмечается; указывается лишь, что глубина биения возрастает при $\delta > 0$ [10]. Это действительно так, однако детальный анализ (6) обнаруживает более сложную структуру фазовых траекторий вблизи $Q = \pi/2$. Отметим прежде всего появление особых точек (I_{st}, ω_{st}), стационарных и при нелинейном режиме. Они описываются уравнениями a' = 0, $\omega' = 0$, имеют координаты

$$\omega^{k}{}_{st} = k\pi/4; \ I^{k}{}_{st} = \delta \left[2 \left(a_{1} - a_{2} \left(-1 \right)^{k} \right) \right]^{-1}, \ k = 0, \ 1, \dots,$$
(7)

и существуют лишь при $\delta > 0^*$. Соотношение (7) дает два набора че-

^{*} Существование стационарных точек в окрестности нелинейных резонансов отмечалось еще в работах [8, 13]; для микротрона появление кратных точек вблизи $Q = \pi$ отмечено в [14].

тырехкратных точек с разными амплитудами, смещенных друг относительно друга на угол $\Delta \omega = \pi/4$ (здесь $(\alpha_1 - \alpha_2) < \alpha_{1,2}$). Существование двух подмножеств корней имеет простую физическую интерпретацию: кроме первого существует еще один интеграл системы — четность. Точки с максимальной амплитудой являются центрами замкнутых траекторий $I = I(\omega)$, описывающих биение амплитуды (рис. 1, *a*). Размах биений весьма зна-

чителен. Далее, при росте а начальной амплитуды характер кривых изменяется, они совершают полный оборот вокруг всех четырех точек $I_{st}^{(k)}$.

Рис. 1. Фазовые кривые первого интеграла (6) при различных начальных амплитудах: U+iV = -at= $\sqrt[4]{\delta}ae^{i\omega}$, где $\delta = 0,005$ (a) и -0--0,005 (b)



При $\delta < 0$ стационарных точек не существует, а резонанс практически не проявляется (рис. 1, б). Различие между случаями $\delta > 0$ и $\delta < 0$ основывается на том, что имеющийся сдвиг частоты за счет нелинейности (5) является отрицательным. Этот факт подтверждается численными расчетами фазового движения в микротроне, выполненными на ЭВМ ЕС-1022 НИИЯФ МГУ. На рис. 2 приведены области устойчивого фазового движения в микротроне для прироста кратности на орбиту v = 1 и различных равновесных фаз. При φ_s ≤ 17,7°, т. е. при $\delta \simeq 0$, не происходит затягивания в резонанс, изображающая точка совершает устойчивые фазовые колебания. Распад фазовой траектории на резонансе четвертого порядка происходит при смещении ф. направо ($\delta > 0$). На рис. З показан ряд областей фазовой устойчиво-сти микротрона для v = 1, $\varphi_s = 18^\circ$, различающихся начальными условиями. Фазовые траектории на рис. 3, а и б имеют одинаковые начальные энергии, значения начальных фаз различаются лишь на 0,02°. В то же время движение в первом случае происходит по траектории, близкой к эллиптической, с малой амплитудой колебаний. Во втором случае амплитуда колебаний резко возрастает, характер движения существенно меняется. Однако существует также область с малой амплитудой колебаний (ср. рис. 1, а). Очевидно, что при попадании хорошо сгруппированного пучка на границу раздела двух режимов фазового движения (границей является эллиптическая траектория на рис. 3, а) при достаточно большом числе орбит будет происходить дробление пучка на отдельные сгустки (рис. 3, в), совершающие колебания с различными значениями фаз и энергий. В частности, экспериментально наблюдаемое двугорбое распределение заряда на выходе микротрона [15] может быть обусловлено этим эффектом. Ясно, что для получения на выходе ускорителя пучка с высокой степенью моноэнергетичности необходимо избегать эффектов «дробления» сгустков.

Характер фазового движения, представленный на рис. 1, сохраняется и в координатах (x_n, y_n) , но следует иметь в виду, что радиусвектор в этой плоскости совершает дополнительные скачки полярного угла на $\pi/2$. Таким образом, резонанс $Q = \pi/2$ проявляется уже при относительно малых δ . С ростом δ ситуация усугубляется, поскольку начинает проявляться другой эффект: $\alpha_1 - \alpha_2 \rightarrow 0$. При этом сначала глубина биений амплитуды возрастает, а при $\alpha_1 = \alpha_2$, что составляет $\delta \approx 1,8^\circ$, резонанс становится абсолютным $(I \rightarrow \infty)$. Поскольку критическая расстройка $\delta \approx 1,8^\circ$ является достаточно большой величиной, гак что справедливость данного аналитического приближения может подвергаться сомнению, были проведены тщательные численные расчеты. Они подтверждают этот вывод теории, хотя абсолютный резо-



нанс проявляется несколько раньше при расстройке δ≈1° (см. рис. 2).

В общем, подобная трансформация резонанса $Q = \pi/2$ является достаточно неожиданной. В нелинейной теории

Рис. 2. Области устойчивого фазового движения в микротроне для различных равновесных фаз φ_s . Прирост кратности на орбиту v=1, число орбит равно 800. Цена деления для $\delta E/E$ равна $2\cdot 10^{-2}$



Рис. 3. Фазовые траектории для различных начальных условий. Число орбит равно 800. Цена деления для $\delta E/E$ равна 2,3 $\cdot 10^{-2}$

традиционных циклических ускорителей резонанс четвертого порядка не всегда считается опасным. Однако провал интенсивности пучка микротрона, наблюдаемый в эксперименте [12] при $\varphi_s \approx 18-19^\circ$, служит подтверждением обнаруживаемого результата. В целом зона резонанса $Q = \pi/2$ составляет несколько градусов, начиная с точки $\varphi_s \approx 17.6^\circ$. Следует ожидать, что резонанс четвертого порядка опасен не только в рециркуляторах, но и в других резонансных системах с дискретной структурой ускоряющих участков и с большим темпом ускорения.

4. Смещение φ_s в район Q ≈ π/2 (окрестность φ_s = 25,52°), как отмечалось, приводит к резкой раскачке колебаний, подтверждаемой экспериментально [12]. Детальный численный расчет (см. рис. 2) показывает, что резонанс $Q = 2\pi/3$ опасен в диапазоне $24^\circ < \varphi_s < 28^\circ$.

В совокупности вся правая зона $Q \ge \pi/2$ (т. е. $\varphi_s > 17,7^\circ$) представляется достаточно опасной, по крайней мере для спектроскопических установок. Напротив, в области $0^\circ < \varphi_s < 17,7^\circ$, где расположены нелинейные резонансы выше четвертого порядка, характер колебаний не отличается существенно от линейного.

5. Выше были изучены области фазовой устойчивости для классического микротрона при различных равновесных фазах (см. рис. 2). При выборе равновесной фазы рециркулятора необходимо учитывать следующие условия: а) ширина области устойчивых фазовых колебаний должна быть по возможности максимальной; б) эта область должна располагаться достаточно далеко от зоны резонанса (третьего или четвертого порядка), так, чтобы случайные изменения амплитуды ускоряющего поля и ведущего магнитного поля, эквивалентные изменению ф, не переводили частицу в область неустойчивого движения; в) прирост энергии за оборот (фактор экономичности) тем выше, чем ближе равновесная фаза к 0°; г) величину фазы не следует чрезмер-но уменьшать, так как при $Q \rightarrow 0$ заметно возрастает влияние различных возмущений (см. (3)). При этом для достижения энергетической монохроматичности пучка $\delta E/E \approx 10^{-4}$ необходимо потребовать стабильности ускоряющего и магнитного полей $\delta \mathcal{E} / \mathcal{E} \sim 10^{-2}$ и $\delta B / B \sim 10^{-4}$. Аналогично определяются и другие допуски. На основании сказанного леыше оптимальная равновесная фаза φ_s≃16°.

Авторы выражают признательность К. А. Беловинцеву, Б. С. Ишханову, А. А. Коломенскому и В. Н. Мелехину за полезное обсуждение результатов работы и ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Негтіп g haus H. et al. IEEE Trans. Nucl. Sci., 1983, NS-30, р. 3274. [2] Nuclear Phys. Res. with a 288 MeV Cascade Mikrotron, December, 1984, Report University of Illinois. [3] Nucl. Phys., 1980, A358. [4] Горбатов Ю. И. и др. Разрезной микротрон непрерывного действия НИИЯФ МГУ (физическое обоснование). М.: Изд-во МГУ, 1984. [5] Беловинцев К. А. и др. Препринт № 88 ФИАН СССР. М., 1984. [6] К hoe T. K. et al. IEEE Trans. Nucl. Sci., 1981, NS-28, р. 2077. [7] Коломенский А. А. Письма в ЖЭТФ, 1967, 5, с. 204. [8] Коломенский А. А. Тр. ФИАН, т. 13. М.: Наука, 1960. [9] Капица С. П., Мелехин В. Н. Микротрон. М.: Наука, 1969. [10] Мелехин В. Н. ЖЭТФ, 1971, 61, с. 1319. [11] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимитотические методы в. теории нелинейных колебаний. М.: ГИТТЛ, 1955. [12] Мелехин В. Н., Луганский Л. Б. ЖТФ, 1970, 40, с. 2465. [13] Коломенсский А. А., Лебедев А. Н. Теория циклических ускорителей. М.: Физматгиз, 1962. [14] Луганский Л. Б. в кн.: Электроника больших мощностей, 1969, № 6, с. 130. [15] Быков В. П. ЖЭТФ, 1961, 40, с. 1958.

Поступила в редакцию 25.02.85