малых и средних энергиях. Расчеты $1S$—$1S$-захвата находятся в хорошем соответствии с экспериментальными данными и расчетами, выполненными в рамках других приближений.

Авторы выражают благодарность В. С. Сенашенко за многочисленные плодотворные обсуждения данной работы и критические замечания по тексту.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Бейтс Д. В кн.: Атомные и молекулярные процессы. М.: Мир, 1964, с. 478. [2] Belkic Dz. et al. Phys. Rep., 1979, **56**, N 6, p. 279. [3] Miraglia J. E. Phys. Rev. A, 1984, **30**, p. 1721. [4] Eichler J., Chan F. T. Ibid., 1979, **20**, p. 104. [5] Maidagan J., Rivarola R. J. Phys. B, 1984, **17**, p. 2477.

Поступила в редакцию
13.05.85

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1986, т. 27, № 2

РАДИОФИЗИКА

УДК 537.86:534.21

ДИФРАКЦИОННАЯ ТОМОГРАФИЯ В ЗОНЕ ФРЕНЕЛЯ

В. Е. Куницын

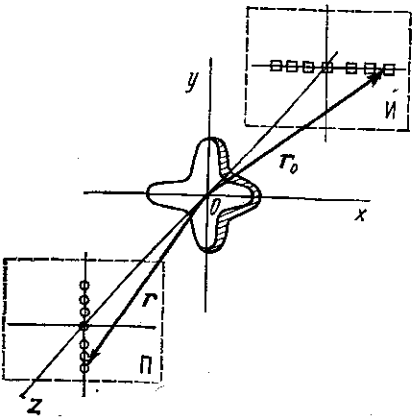
(кафедра общей физики для физического факультета)

Достигнутый уровень развития вычислительной техники обусловил интенсивное развитие в последнее десятилетие томографических методов исследования структуры неоднородных объектов, начало которому было положено созданием рентгеновского томографа. Алгоритмы реконструкции, применяемые в практической рентгеновской томографии, основаны на прямолинейной аппроксимации лучевых траекторий. В математическом отношении такие задачи сводятся к восстановлению функции ослабления или коэффициента преломления по совокупности линейных интегралов, к восстановлению объекта по его проекциям [1]. Вслед за рентгеновским излучением сейчас для целей реконструктивной томографии пытаются использовать практически все известные виды излучений и волн [2]. В связи с тем что в томографических исследованиях с использованием оптических, ультразвуковых, СВЧ и других волн прямолинейная аппроксимация лучевых траекторий часто не приводит к хорошим результатам, актуальна разработка алгоритмов реконструкции, учитывающих эффекты рефракции и дифракции волн. Теория задач реконструктивной томографии с учетом дифракции, как отмечается в обзоре [3], только начинает развиваться.

В данной работе решается задача томографической реконструкции показателя преломления с учетом дифракции в рамках известных в теории волн приближений: метода плавных возмущений и борновского приближения. Анализ основан на решении уравнения Гельмгольца, к которому сводятся многие задачи с указанными типами волн,

$$\Delta U+\frac{\omega^2}{c^2}n^2(\mathbf{r},\ \omega)\,U=\delta(\mathbf{r}-r_0), \tag{1}$$

где ω — частота волн, c — скорость волн в свободном пространстве, $n(\mathbf{r},\ \omega)$ — показатель преломления. Дельта-функция $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)$ соответствует точечному зондирующему источнику с радиус-вектором $\mathbf{r}_0$. Под объектом реконструкции будем понимать ограниченную неоднородность с переменным показателем преломления, всюду в окружающем объект пространстве $n=1$. Здесь рассматривается постановка задачи с точечным зондирующим источником, поскольку нередко кривизной волнового фронта излучения на объекте пренебречь нельзя. Введем систему декартовых координат $\mathbf{r}=(\boldsymbol{\rho}, z)$; $\boldsymbol{\rho}=(x, y)$, начало которой связано с объектом. Задача томографической реконструкции состоит в восстановлении функции $n(\mathbf{r}, \omega)$ или финитной функции $f(\mathbf{r}, \omega)\equiv 1-n^2$ по измерениям поля U в области приема, расположенной в плоскости П, ортогональной оси z. Облучение объекта производится матрицей излучателей (или одним сканирующим точечным излучателем), расположенных в плоскости И (рисунок), координаты излучателей: $\mathbf{r}_0=(\boldsymbol{\rho}_0, -z_0)$, $z_0>0$; приемников: $\mathbf{r}_п=(\boldsymbol{\rho}_п, z_п)$, $z_п>0$.



Введем комплексную фазу поля $\Phi: U=\exp\ \Phi=\exp(\varphi_0+\varphi+\ldots)$, тогда для нулевого φ_0 и первого φ приближения фазы поля при условии малости $|f|\ll 1$ в рамках метода плавных возмущений получаются следующие уравнения [4]:

$$\exp\varphi_0(\Delta\varphi_0+(\nabla\varphi_0)^2+\omega^2/c^2)=\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0),$$
$$\Delta\varphi+2\nabla\varphi_0\nabla\varphi=(\omega^2/c^2)f(\mathbf{r}, \omega).$$

Решением первого уравнения будет, как и следовало ожидать, логарифм функции Грина уравнения Гельмгольца (1) с $n=1$, т. е.

$$\varphi_0=\ln\left(-\frac{\exp(i(\omega/c)|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|)}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}\right).$$

Решение второго имеет вид

$$\varphi(\mathbf{r}, \omega)=-\frac{\exp(-\varphi_0)}{4\pi}\frac{\omega^2}{c^2}\int\frac{\exp\left(i\frac{\omega}{c}|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|}f(\mathbf{r}_1, \omega)\exp(\varphi_0(\mathbf{r}_1, \omega))\,d^3r_1. \tag{2}$$

Обращение полученного соотношения проведем в важном для большинства практических приложений случае зоны Френеля с некоторыми дополнительными предположениями, т. е. считаем выполненными условия

$$z_п,\ z_0\gg\rho_п,\ \rho_0,\ r_m;\ z_п^2,\ z_0^2\gg\frac{r_m^3}{\lambda},\ \frac{z_m\rho_п^2}{\lambda};\ z_п^3,\ z_0^3\gg\frac{\rho_п^4}{\lambda},\ \frac{\rho_m^4}{\lambda}. \tag{3}$$

Здесь ρ_m — максимальный радиус объекта в плоскости (x, y), r_m — максимальный радиус объекта в пространстве, $\lambda=2\pi c/\omega$ — длина волны излучения в свободном пространстве. Тогда, производя разложения показателей экспонент в (2),

$$|\mathbf{r}_п-\mathbf{r}_1|\simeq z_п-z_1+\frac{(\boldsymbol{\rho}_п-\boldsymbol{\rho}_1)^2}{2z_п}+O\left(\frac{(\boldsymbol{\rho}_п-\boldsymbol{\rho}_1)^4}{z_п^3}+\frac{z_1^3}{z_п^2}+\frac{z_1(\boldsymbol{\rho}_п-\boldsymbol{\rho}_1)^2}{z_п^2}\right),$$

$$|\mathbf{r}_п-\mathbf{r}_0|\simeq z_п+z_0+\frac{(\boldsymbol{\rho}_п-\boldsymbol{\rho}_0)^2}{2(z_п+z_0)}+O\left(\frac{(\boldsymbol{\rho}_п-\boldsymbol{\rho}_0)^4}{(z_п+z_0)^3}\right),$$

приходим к соотношению

$$\varphi(\mathbf{r}_п\omega) \simeq \frac{-\omega^2 (z_п + z_0)}{4\pi z_п z_0 c^2} \int f(\mathbf{r}_1, \omega) \exp\left(i \frac{\omega}{c}\left(\frac{(\rho_п - \rho_1)^2}{2z_п} + \frac{(\rho_0 - \rho_1)^2}{2z_0} - \frac{(\rho_п - \rho_0)^2}{2(z_п + z_0)}\right)\right) d^3 r_1. \quad (4)$$

Далее введем вектор s, определяемый через координаты источников и приемников,

$\mathbf{s} = \frac{z_0}{z_п + z_0}\rho_п + \frac{z_п}{z_п + z_0}\rho_0$; $\zeta = \frac{z_п z_0}{z_п + z_0}$, тогда $\frac{(\rho_п - \rho_1)^2}{2z_п} + \frac{(\rho_0 - \rho_1)^2}{2z_0} = \frac{(\mathbf{s} - \rho_1)^2}{2\zeta} + \frac{(\rho_п - \rho_0)^2}{2(z_п + z_0)}$ и вместо (4) получим

$$\varphi(\mathbf{r}_п, \omega) \simeq \frac{-\omega^2}{4\pi\zeta c^2} \int f(\mathbf{r}_1, \omega) \exp\left(i \frac{\omega}{2\zeta c}(\mathbf{s} - \rho_1)^2\right) d^3 r_1. \quad (5)$$

Нетрудно видеть, что вследствие представления (5) величина φ является в данном приближении функцией только переменной s и параметра ω. Выполнив обратное преобразование Френеля, получим линейный интеграл вдоль оси z от функции $f(\mathbf{r}, \omega)$:

$$f_z(\rho, \omega) \equiv \int f(\mathbf{r}, \omega)\, dz = -\frac{1}{\pi\zeta} \int \varphi(\mathbf{s}) \exp\left(-i \frac{\omega}{2\zeta c}(\mathbf{s} - \rho)^2\right) d^2 s, \quad (6)$$

причем интеграл $f_z(\rho, \omega)$ восстанавливается единственным образом по измерениям $\varphi(\mathbf{s})$ в ограниченной области s-пространства вследствие того, что $\varphi(\mathbf{s})$ — аналитическая функция переменной s. Действительно, рассмотрим функцию $\varphi(\sigma)$, являющуюся продолжением функции $\varphi(\mathbf{s})$ (5), заданной в пространстве действительных переменных s_x, s_y на все пространство C^2 комплексных переменных $\sigma_x = s_x + is'_x$, $\sigma_y = s_y + is'_y$. Кусочно-непрерывная функция $f_z(\rho, \omega) \in L^1$, и интеграл (5) можно понимать в обычном смысле. Из того, что область, на которую распространен интеграл, ограничена, вытекает, что он абсолютно и равномерно сходится в любой ограниченной области пространства C^2; кроме того, подынтегральное выражение — целая функция переменных σ_x и σ_y. Поэтому $\varphi(\sigma)$ — целая функция двух переменных [5]. Следовательно, для единственного восстановления $f_z(\rho, \omega)$ нужны данные о $\varphi(\mathbf{s})$ на ограниченном элементе плоскости s, с которого можно аналитически продолжить $\varphi(\mathbf{s})$ на все пространство. Коэффициенты степенного ряда аналитической функции $\varphi(\sigma)$ могут быть получены с помощью вычисления производных в направлении действительных осей.

Таким образом, соотношение (6) дает возможность получать линейные интегралы от показателя преломления, производя измерения поля в ограниченной области s-пространства, чего можно добиться, имея матрицу приемников при одном излучателе или матрицу излучателей при одном приемнике или производя электронное сканирование, имея две скрещенные линейки излучателей и приемников. Далее, выполняя аналитическое продолжение с указанной области на все s-пространство, получим линейные интегралы вида (6). И задача с учетом дифракции сводится к стандартной задаче реконструктивной томографии — задаче восстановления по проекциям. Поворачивая объект или приемо-передающую систему (ось z) относительно объекта, можно получить серию линейных интегралов вида (6), по которым возможна томографическая реконструкция показателя преломления.

Методы томографической реконструкции по интегралам типа (6) достаточно хорошо разработаны [1, 3] и здесь рассматриваться не будут.

Влияние дифракции свелось к тому, что линейный интеграл (6) зависит не только от поля на луче, но и от поля в окрестности точки пересечения луча с плоскостью регистрации П. Если частота излучения становится большой, то в пределе $\omega\to\infty$ интеграл (6) должен зависеть только от поля на луче (эйкональное приближение с прямолинейной траекторией).

Пусть на объект падает плоская зондирующая волна ($\rho_0=0$, $z_0\to\to\infty$), тогда, вычисляя интеграл (6) в пределе больших ω методом перевала, получим

$$f_z(\rho,\ \omega)\equiv\int f(\mathbf{r},\ \omega)\,dz\simeq\frac{-1}{\pi\zeta}\varphi(\rho,\ \omega)\frac{2\zeta c}{\omega}(-i\pi)=i\frac{2c}{\omega}\varphi(\rho,\ \omega). \qquad (7)$$

Действительно, набег фазы Φ на объекте в приближении геометрической оптики равен интегралу от показателя преломления

$$\Phi=\varphi_0+\varphi=i\frac{\omega}{c}\int n(\mathbf{r},\ \omega)\,dz=i\frac{\omega}{c}\int\sqrt{1-f}\,dz\simeq i\frac{\omega}{c}\int\left(1-\frac{f}{2}\right)dz.$$

Отсюда для первого приближения φ комплексной фазы поля имеем $\varphi\simeq-i\frac{\omega}{2c}\int f(\mathbf{r},\ \omega)\,dz$, что совпадает с (7), т. е. линейные интегралы вида (6) в пределе больших частот зависят только от поля на луче. Последнее означает, что использованное здесь приближение содержит в пределе больших частот в частном случае и приближение геометрической оптики с прямолинейными траекториями.

Решение задачи в борновском приближении проводится полностью аналогично, и конечный результат имеет форму, подобную (6):

$$f_z(\rho,\ \omega)\equiv\int f(\mathbf{r},\ \omega)\,dz=\left(\frac{\omega}{2\pi\zeta c}\right)^2\int V(\mathbf{s},\ \omega)\exp\left(-i\frac{\omega}{2\zeta c}(\mathbf{s}-\rho)^2\right)d^2s, \qquad (8)$$

где

$$V(\mathbf{s},\ \omega)=(4\pi)^2 zz_0u(\mathbf{r},\ \omega)\exp\left(-i\frac{\omega}{c}(z+z_0)-i\frac{\omega}{2c}\frac{(\rho-\rho_0)^2}{z+z_0}\right)$$

определяется полем первого борновского приближения u:

$$u=u_0+u,\ u_0=\frac{-1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}\exp\left(i\frac{\omega}{c}|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|\right).$$

Поскольку процедура аналитического продолжения является неустойчивой, целесообразно рассмотреть, как связана с $f_z(\rho,\ \omega)$ функция $F_z(\rho,\ \omega)$, которая получается после преобразования данных о поле (6), (8) с ограниченной области задания в $\mathbf{s}$-пространстве. Введем характеристическую функцию области задания поля $H(\mathbf{s})$, принимающую значения 1 и 0, тогда

$$F_z(\rho,\ \omega)=\frac{1}{\pi\zeta}\int H(\mathbf{s})\,\varphi(\mathbf{s})\exp\left(-i\frac{\omega}{2\zeta c}(\mathbf{s}-\rho)^2\right)d^2s \qquad (9)$$

связано следующим интегральным уравнением с $f_z(\rho,\ \omega)$:

$$F_z(\rho,\ \omega)=\int f_z(\rho',\ \omega)\,h(\rho,\ \rho',\ \omega)\,d^2\rho', \qquad (10)$$

с ядром

$$h(\rho, \rho', \omega)=\left(\frac{\omega}{2\pi\zeta c}\right)^2\int H(\mathbf{s})\exp\left(i\frac{\omega}{2\zeta c}((\mathbf{s}-\rho')^2-(\mathbf{s}-\rho)^2)\right)d^2s, \quad (11)$$

в чем можно убедиться непосредственной подстановкой (11) в (10) и сравнением (9) и (6). Аналогичное уравнение получается и для случая борновского приближения (8). Видно, что $F_z(\rho, \omega)$ представляет собой сглаженный линейный интеграл, или интеграл по лучу конечной «толщины». Разрешающая способность (рэлеевский предел) определяется параметрами системы регистрации поля. Например, если область определения $\varphi(\mathbf{s})$ имеет пределы $-s_m\leqslant s_x,\ s_y\leqslant s_m$, то модуль ядра (11) при $y=y'$, $z=z'$ равен

$$|h(x-x',\ 0,\ 0)|\sim\left|\left(\frac{\omega(x-x')s_m}{\zeta c}\right)^{-1}\sin\left(\frac{\omega(x-x')s_m}{\zeta c}\right)\right|,$$

откуда разрешающая способность системы регистрации по осям x и y $\delta_x=\delta_y=\dfrac{\pi\zeta c}{\omega s_m}=\dfrac{\lambda\zeta}{2s_m}$.

В работах [6—8] также рассматривалось влияние дифракции на реконструктивную томографию. Указанные работы основаны на соотношении, по-видимому впервые полученном в [9] и связывающем трехмерное фурье-преобразование от функции f с угловым спектром поля или комплексной фазы поля. Каждое измерение рассеянного поля дает двумерный срез спектра возмущения (поверхностью сферы). После заполнения фурье-пространства (поворачивая зондирующую волну или объект) с помощью соответствующей процедуры интерполяции в частотной [6, 7] или пространственной [8] областях можно получить путем обратного фурье-преобразования функцию $f(\mathbf{r}, \omega)$. Здесь в отличие от [6—8], во-первых, рассмотрена более общая постановка задачи с точечными зондирующими источниками и, во-вторых, в рамках френелевского приближения осуществлен переход от спектра возмущения к функциям $f_z(\rho, \omega)$, которые явно выражены через измеряемое поле (6). Это позволяет, что представляется важным, производить томографическую реконструкцию с учетом дифракции по тем же линейным интегралам, учитывая поле в «окрестности луча», т. е. используя традиционные томографические методы и технику, не прибегая к другим алгоритмам в отличие от [6—8]. Кроме того, предложенная схема реконструкции содержит в частном случае в пределе больших частот и схему традиционной томографии с прямолинейными траекториями. По смыслу использованных приближений полученные выше соотношения учитывают слабые рефракционные и дифракционные эффекты, т. е. данная схема тем лучше, чем ближе физическая ситуация к ситуации с прямолинейными лучами, когда «работает» высокочастотный предел алгоритма. Это не означает, что частоту зондирования нужно выбирать как можно больше, так как во многих случаях показатель преломления в широком диапазоне растет с частотой. Частота зондирования должна быть такой, чтобы были слабыми рефракционные и дифракционные эффекты. Иными словами, алгоритм не требует, чтобы с ростом частоты траектории «выпрямлялись», а требует, чтобы на данной частоте они были близки к «прямым». В случае сильных рассеивателей и больших углов дифракции решение задачи усложняется. Одним из возможных подходов к таким задачам является оценка рассеивателей методом усреднения [10]. Заметим, что термин «томография» для подобных обратных задач с сильными рассеивателями вряд ли целесообразен.

Таким образом, использованное в работе малоугловое френелевское приближение позволило получить сравнительно несложный алгоритм обработки поля и свести задачу дифракционной томографии к задаче традиционной томографической реконструкции по линейным интегралам.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Хермен Г. Восстановление изображений по проекциям. М.: Мир, 1983. [2] Бейтс Р. Х. Т., Гарден К. Г., Питерс Т. М. ТИИЭР, 1983, 71, № 3, с. 84. [3] Пикалов В. В., Преображенский Н. Г. УФН, 1983, 141, вып. 3, с. 469. [4] Татарский В. И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. М.: Наука, 1967. [5] Фукс Б. А. Теория аналитических функций многих комплексных переменных. М.: Физматгиз, 1962. [6] Мюллер Р. К., Кавех М., Уэйд Г. ТИИЭР, 1979, 67, № 4, с. 146. [7] Soumekh M., Kavch M., Mueller R. K. ICASP-83 Proc., vol. 1. N. Y., 1983, p. 135. [8] Devaney A. T. 1982 Ultrasonics Symp. Proc. N. Y., 1982, p. 975. [9] Wolf E. Opt. Comm., 1969, 1, N 4, p. 153. [10] Буров В. А., Горюнов А. А., Сасковец А. В. Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон., 1982, 23, № 6, с. 89.

Поступила в редакцию
28.01.85

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1986, т. 27, № 2

УДК 532.517+621.373

ПОВЕДЕНИЕ АВТОГЕНЕРАТОРА ХАОТИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ПРИ ВНЕШНЕМ ПЕРИОДИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Ю. И. Кузнецов, И. И. Минакова, Б. А. Сильнов

(кафедра физики колебаний)

В работах [1—2] показано, что хаотические автоколебания могут быть синхронизированы периодическим внешним воздействием. При этом отмечены особенности синхронизации хаотических автоколебаний: синхронизация происходит на характерных частотах систем с хаосом и имеет амплитудный порог, который может служить мерой хаоса [3].

Настоящая работа является продолжением экспериментальных исследований [2], направленных на изучение влияния внешнего периодического воздействия на поведение систем с хаосом.

В качестве объекта исследования взят автогенератор хаотических колебаний с туннельным диодом в цепи колебательного контура. Прототип такого генератора описан в работе [4]. Схема автогенератора хаотических колебаний и блок-схема установки показаны на рис. 1. Здесь L и C — индуктивность и емкость колебательного контура, ТД — туннельный диод, ПТ — полевой транзистор, R — сопротивление в цепи истока ПТ, R_1C_1 — разделительная цепочка. Внешнее периодическое воздействие подавалось от генератора переменного тока ГПТ, спектр колебаний автогенератора наблюдался с помощью анализатора спектра АС.

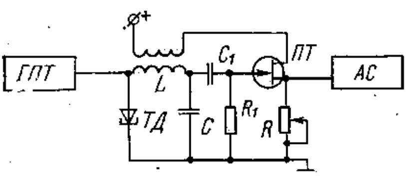


Рис. 1

Исследованная схема автогенератора хаотических колебаний имела следующие параметры: основная частота f_0, определяемая параметрами LC контура, равна 620 кГц, ТД типа ЗИ306Е, ПТ типа КП303Ж, R_1=3,3 МОм, C_1=0,1 мкФ, R=4,7 кОм. В качестве ГПТ использовался Г4-117 с дополнительным сопротивлением на выходе, для наблюдения спектра применялся анализатор С4-25.

В работе [2] было показано, что в автономном режиме с увеличением инкремента система последовательно проходит через конечное число областей детерминированного поведения, разделенных областями хаоса. В каждой области детерминированного поведения система генерирует периодическую последовательность цугов нарастающих колебаний с характерным для этой области числом N колебаний основной частоты f_0 в цуге. С ростом инкремента в каждой последующей области детерминированного поведения число N уменьшается на единицу и общая эволюция по-