

АСТРОНОМИЯ

УДК 521.13

О ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЯХ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ФОТОГРАВИТАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ

Л. Г. Лукьянов

(ГАНШ)

Со времен Лагранжа хорошо известны прямолинейные и треугольные решения в общей и ограниченной задачах трех тел. В фотогравитационной задаче кроме этих решений были найдены еще компланарные [1, 2]. Однако все эти решения существуют только для автономных систем, когда силовая функция не зависит явно от времени. Не известно ни одного аналогичного строгого частного решения для неавтономных систем.

В настоящей работе рассматривается существование строгих частных решений в фотогравитационной задаче трех тел, когда силовая функция $U = q_1(1 - \mu)/r_1 + q_2\mu/r_2$ явно зависит от времени t посредством параметров q_1 и q_2 , характеризующих переменное световое давление.

Уравнения движения тела M_3 малой массы в ограниченной круговой фотогравитационной задаче трех тел запишем в прямоугольной равномерно вращающейся барицентрической системе координат с осью \dot{x} , направленной от тела M_1 с массой $1 - \mu$ к телу M_2 с массой μ , при стандартном выборе в качестве единиц измерения расстояния между основными телами M_1 и M_2 , суммы их масс и гравитационной постоянной:

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = X, \quad \ddot{y} + 2\dot{x} = Y, \quad \ddot{z} = Z, \quad (1)$$

где $X = x - \frac{q_1(1 - \mu)(x + \mu)}{r_1^3} - \frac{q_2\mu(x + \mu - 1)}{r_2^3}$,

$$Y = y \left[1 - \frac{q_1(1 - \mu)}{r_1^3} - \frac{q_2\mu}{r_2^3} \right], \quad Z = -z \left[\frac{q_1(1 - \mu)}{r_1^3} + \frac{q_2\mu}{r_2^3} \right],$$

$$r_1^2 = (x + \mu)^2 + y^2 + z^2, \quad r_2^2 = (x + \mu - 1)^2 + y^2 + z^2.$$

Все возможности существования стационарных прямолинейных, треугольных и компланарных частных решений системы (1) (точек либрации) при постоянных параметрах q_1 и q_2 подробно исследованы в работах [3, 4]. Цель настоящей работы — установить, сохраняются ли эти стационарные решения в случае, когда q_1 и q_2 зависят от времени.

Рассмотрим сначала как более простые треугольные и компланарные решения. Для треугольных решений должны выполняться соотношения [1]

$$q_1 = r_1^3, \quad q_2 = r_2^3,$$

а для компланарных решений — соотношения [2]

$$(1 - \mu)q_1 = \mu r_1^3, \quad -\mu q_2 = \mu r_2^3.$$

Отсюда видно, что треугольные и компланарные решения могут существовать лишь для постоянных параметров q_1 и q_2 .

Иной результат получается для прямолинейных решений. Здесь рассмотрим сначала более подробно автономную систему (с постоянными q_1 и q_2).

Все прямолинейные стационарные решения определяются [3] из уравнения $\varphi(x) = 0$, где

$$\varphi(x) = X|_{y=z=0} = x + \frac{q_1(1-\mu)}{(x+\mu)^2} \pm \frac{q_2\mu}{(x+\mu-1)^2},$$

верхний знак — для $x < -\mu$, средний — для $-\mu < x < 1-\mu$, нижний — для $x > 1-\mu$.

Уравнение $\varphi(x) = 0$ на плоскости q_1q_2 определяет однопараметрическое семейство прямых с параметром x (μ — произвольная постоянная величина, $0 < \mu \leq 1/2$). Это семейство имеет огибающую, определяемую из системы $\varphi(x) = 0$ и $\varphi'(x) = 0$ в параметрическом виде:

$$q_1 = \mp q_1^*(x), \quad q_2 = \pm q_2^*(x), \quad (2)$$

где $2(1-\mu)q_1^* = (x+\mu)^3(3x+\mu-1)$, $2\mu q_2^* = (x+\mu-1)^3(3x+\mu)$.

Каждая прямая семейства касается огибающей, и притом только в одной точке, т. е. все семейство прямых $\varphi(x) = 0$ есть совокупность всех касательных к кривой (2).

На плоскости q_1q_2 огибающая разделяет области существования трех прямолинейных решений (область, содержащая первую четверть) и одного решения. В работе [3] эта кривая получена из других соображений. Вид огибающей представлен на рис. 1.

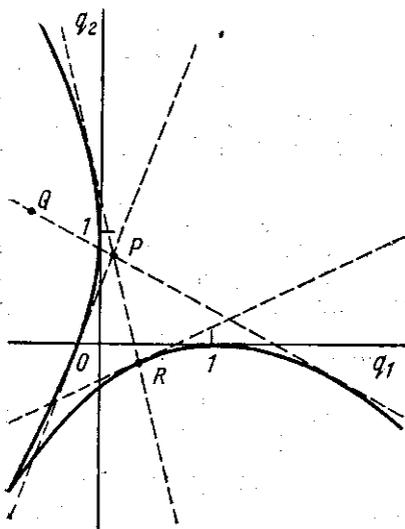


Рис. 1. Области существования прямолинейных точек либрации в стационарной задаче: огибающая семейства прямых $\varphi(x) = 0$ (сплошная линия) и некоторые из прямых семейства (пунктир)

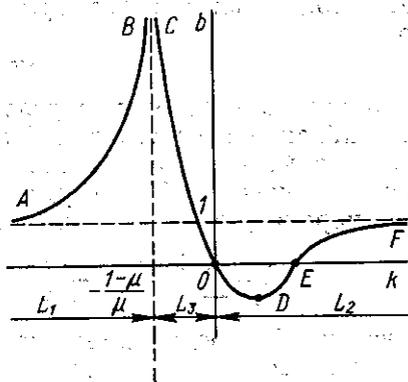


Рис. 2. Кривая значений параметров k и b , для которых существует прямолинейная точка либрации L_1 , L_2 или L_3 в нестационарной задаче. Диапазоны существования соответствующей точки либрации указаны внизу рисунка

Полученный результат по числу решений допускает простое геометрическое толкование. Через каждую точку области, ограниченной кривой (2) и содержащей первую четверть (точка P на рис. 1), можно провести три касательные к кривой (2), что соответствует существ-

вованию трех прямолинейных решений. Через каждую точку оставшейся части плоскости $q_1 q_2$ можно провести лишь одну касательную к кривой (2), т. е. существует одно прямолинейное решение (точка Q на рис. 1). А через каждую точку самой кривой (2) можно провести две касательные к этой кривой, т. е. существует два прямолинейных решения (точка R на рис. 1). Исключения могут составить лишь оси координат (см. [3]).

Рассмотрим теперь возможность удовлетворения уравнения $\varphi(x) = 0$ при параметрах q_1 и q_2 , зависящих от времени. Из изложенных результатов видно, что прямолинейное решение будет существовать при определенных q_1 и q_2 , таких, что

$$q_1 = f(t), \quad -q_2 = \pm \frac{x(x+\mu-1)^2}{\mu} \mp f(t) \frac{1-\mu}{\mu} \left(\frac{x+\mu-1}{x+\mu} \right)^2, \quad (3)$$

где $f(t)$ — произвольная функция времени, которая может иметь разрывы первого рода. Это решение может определять точку либрации L_1 при $x < -\mu$, L_2 при $-\mu < x < 1 - \mu$ и L_3 при $x > 1 - \mu$. Однако существовать может лишь какая-либо одна из прямолинейных точек либрации в соответствии с (3).

На плоскости $q_1 q_2$ этот результат означает, что параметры q_1 и q_2 изменятся так, что всегда остаются на одной и той же прямой семейства $\varphi(x) = 0$.

Итак, для любых x и любой функции $f(t)$ всегда можно указать закон изменения q_1 и q_2 согласно (3), такой, что точка x будет точкой либрации. Это решение обратной задачи.

Для практики более интересно решение прямой задачи. А именно: известна зависимость от времени параметров q_1 и q_2 , требуется установить возможность существования точек либрации и их координаты.

Существовать может только одна прямолинейная точка либрации и лишь тогда, когда параметры q_1 и q_2 связаны линейной зависимостью

$$q_2 = kq_1 + b. \quad (4)$$

Но это только необходимое условие существования прямолинейной точки либрации в неавтономной задаче. Далекое не для всяких значений постоянных k и b возможно существование прямолинейной точки либрации. Значения k и b , для которых существует прямолинейная точка либрации, получаются из $\varphi(x) = 0$ в виде

$$k = \mp \frac{1-\mu}{\mu} \left(\frac{x+\mu-1}{x+\mu} \right)^2, \quad b = \frac{-}{\mp} \frac{x(x+\mu-1)^2}{\mu}. \quad (5)$$

Уравнения (5) представляют собой параметрические уравнения кривой на плоскости k, b . Только для точек, лежащих на этой кривой, существует прямолинейное решение при параметрах q_1 и q_2 , зависящих от времени и связанных друг с другом зависимостью (4). Вид кривой (5) изображен на рис. 2, а координаты некоторых ее точек приведены в таблице. Интересна точка E кривой на рис. 2, для которой параметры q_1 и q_2 пропорциональны: $q_2 = \left(\frac{1-\mu}{\mu} \right)^3 q_1$, где q_1 — произвольная функция времени. В этом случае существует точка либрации L_2 , расположенная в центре масс системы $x=0$.

Таким образом, если в ограниченной круговой фотогравитационной задаче трех тел параметры q_1 и q_2 зависят явно от времени, то треугольных и компланарных решений не существует. Может существовать только одно прямолинейное решение (или L_1 , или L_2 , или L_3).

Координаты некоторых характерных точек на рис. 2

Точка	x	k	b
A	$-\mu$	$-\infty$	1
B	$-\infty$	$-\frac{1-\mu}{\mu}$	$+\infty$
C	$+\infty$	$-\frac{1-\mu}{\mu}$	$+\infty$
O	$1-\mu$	0	0
D	$\frac{1-\mu}{3}$	$\frac{4}{3} \frac{(1-\mu)^3}{\mu} (1+2\mu)$	$-\frac{4}{27} \frac{(1-\mu)^3}{\mu}$
E	0	$\left(\frac{1-\mu}{\mu}\right)^3$	0
F	$-\mu$	$+\infty$	1

но лишь при условии, что параметры q_1 и q_2 связаны линейной зависимостью (4), где величины k и b определяются по формулам (5). Величина q_1 в (4) может быть произвольной функцией времени. Параметр x кривой (5) определяет абсциссу точки либрации.

Полученное частное решение сохраняется и для общей задачи, когда тела M_i ($i=1, 2, 3$) обладают конечными массами m_i и тело M_j действует на тело M_i с силой $f q_{ij} m_i m_j r_{ij}^{-2}$, где r_{ij} — расстояние между M_i и M_j , f — гравитационная постоянная.

Уравнения движения тел M_i в неподвижной цилиндрической системе координат $O r \varphi z$ имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{r}_i - r_i \dot{\varphi}_i^2 &= f \sum_{j=i+1}^{i+2} m_j q_{ij} (r_j \cos \alpha_{ij} - r_i) r_{ij}^{-3}, \\ \frac{1}{r_i} \frac{d}{dt} (r_i^2 \dot{\varphi}_i) &= f \sum_{j=i+1}^{i+2} m_j q_{ij} r_j \sin \alpha_{ij} r_{ij}^{-3}, \\ \ddot{z}_i &= f \sum_{j=i+1}^{i+2} m_j q_{ij} (z_j - z_i) r_{ij}^{-3}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\alpha_{ij} = -\alpha_{ji} = \varphi_j - \varphi_i$,

$$r_{ij}^2 = r_i^2 - 2r_i r_j \cos \alpha_{ij} + r_j^2 + (z_j - z_i)^2.$$

Если при суммировании индекс j принимает значение 4 или 5, то его следует заменить соответственно на 1 или 2.

При постоянных параметрах q_{ij} уравнения (6) допускают аналогичные прямолинейные, треугольные и компланарные решения. Каждое тело при этом движется по некоторому коническому сечению с эксцентриситетом e .

Если параметры q_{ij} зависят от времени, то треугольных и компланарных решений не существует.

Остановимся на прямолинейных решениях. Для их определения в виде

$$r_i = p_i (1 + e \cos v)^{-1}, \quad \dot{v} = \dot{\varphi}_i = n (1 + e \cos v)^2, \\ v = \varphi_i - \omega_i, \quad z_i = 0, \quad \alpha_{ij} = 0 \quad \text{или} \quad \alpha_{ij} = 180^\circ,$$

где e , p_i , n , ω_i — постоянные величины, из системы (6) получаем три алгебраических уравнения с неизвестными p_i :

$$-n^2 p_i = f \sum_{j=i+1}^{i+2} m_j q_{ij} (p_j s_{ij} - p_i) \rho_{ij}^{-3}, \quad (7)$$

где $s_{ij} = \cos \alpha_{ij} = \pm 1$, $\rho_{ij} = r_{ij} (1 + e \cos v) = \sqrt{p_i^2 + p_j^2 - 2p_i p_j s_{ij}} = |s_{ij} p_j - p_i|$.

Уравнения (7) будут удовлетворяться, если положить $q_{13} = f_1(t)$, $q_{21} = f_2(t)$, $q_{32} = f_3(t)$, где f_1 , f_2 , f_3 — произвольные функции времени, допускающие конечные разрывы, а параметры q_{12} , q_{23} и q_{31} определить из уравнений

$$q_{ii+1} = \frac{\rho_{ii+1}^3}{m_{i+1} (s_{ii+1} p_{i+1} - p_i)} \left[n^2 p_i + m_{i+2} f_i(t) \frac{s_{ii+2} p_{i+2} - p_i}{\rho_{ii+2}^3} \right]. \quad (8)$$

Иными словами, каждые два параметра q_{ii+1} и q_{ii+2} могут произвольным образом зависеть от времени, но так, чтобы между ними сохранялась линейная зависимость (7). Тогда сохраняется прямолинейное решение, полученное для постоянных параметров q_{ij} . Физически это решение означает, что на тело M_i два других тела оказывают переменное световое давление, но такое, что суммарный эффект их воздействия удерживает тело в положении равновесия.

Одна или две из трех функций $f_i(t)$ могут быть постоянными. Если, например, положить $f_1(t) = 0$, $f_2(t) = 1$, $f_3(t) = f(t)$ и подобрать соответствующим образом константы и единицы измерений, то можно получить ограниченную фотогравитационную задачу, рассмотренную выше, для которой $q_{13} = q_{23} = 0$, $q_{12} = q_{21} = 1$, $q_{31} = q_1$, $q_{32} = q_2$.

Полученное прямолинейное решение существует и для общей фотогравитационной задачи трех тел с переменными массами в постановке, аналогичной задаче Гюльдена — Мещерского [5], когда изменение масс не приводит к появлению дополнительных сил в уравнениях движения. Действительно, в такой постановке задачи уравнения (6) и (7) сохраняют свой вид. Уравнения (7) могут быть удовлетворены, если считать параметры $q_{13}(t)$, $q_{21}(t)$, $q_{32}(t)$ и массы $m_1(t)$, $m_2(t)$, $m_3(t)$ произвольными функциями времени, а параметры $q_{12}(t)$, $q_{23}(t)$, $q_{31}(t)$ определить из трех уравнений (7), т. е. теми же уравнениями (8), но с массами, произвольно зависящими от времени.

Кроме того, следуя гипотезе Дирака, можно считать, что не только массы тел, но и гравитационная постоянная f является некоторой функцией времени. И в этом случае существует строгое прямолинейное решение, если параметры q_{ij} массы тел m_i и гравитационная постоянная f для любого момента времени связаны соотношениями (8).

В заключение отметим, что полученное в настоящей работе частное решение может иметь практические приложения в астрономии, например при изучении движения малых частиц в фотогравитационном поле двойной звездной системы с переменным световым давлением. Возможно, при определенных условиях в окрестности полученной

прямолинейной точки либрации ограниченной фотогравитационной задачи трех тел может происходить накопление частиц пылевого облака.

Возможности практического использования прямолинейного решения в рамках общей фотогравитационной задачи трех тел пока не вполне ясны.

Возможно, по-видимому, использование рассмотренной задачи и в электростатике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Радзиевский В. В. Астрон. журн., 1950, 27, с. 250. [2] Радзиевский В. В. Там же, 1953, 30, с. 256. [3] Лукьянов Л. Г. Там же, 1984, 61, с. 564. [4] Лукьянов Л. Г. Там же, 1984, 61, с. 789. [5] Мещерский И. В. Работы по механике тел переменной массы. М.: ГИТЛ, 1952.

Поступила в редакцию
18.02.85

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1986, т. 27, № 2

ФИЗИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 546.3

ЛОКАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ АТОМОВ ЖЕЛЕЗА И МАРГАНЦА В ИНТЕРМЕТАЛЛИДАХ КВАЗИБИНАРНОЙ СИСТЕМЫ $\text{Er}(\text{Fe}_{1-x}\text{Mn}_x)_2$

А. С. Илюшин, Д. А. Кастро (Венесуэла), И. А. Махмуд (АРЕ)

(кафедра физики твердого тела)

В последние годы внимание исследователей привлечено к магнетикам, синтезированным на основе редкоземельных металлов. Особое место среди них занимают соединения со структурами фаз Лавеса C14 , C15 и C36 : некоторые представители этих соединений обладают уникальными магнитными характеристиками, такими как «гигантская магнитострикция» [1—5]. Наиболее перспективными для использования в качестве магнитных материалов при создании новой техники являются тройные и многокомпонентные сплавы на основе двойных интерметаллических соединений типа TbFe_2 и TbCo_2 . Замещение атомов переходных металлов в $3d$ -подрешетке интерметаллических соединений типа $R(T'_{1-x}T''_x)_2$ позволяет получать для них константы магнитострикции λ , значительно превосходящие их рекордные значения для соединений TbFe_2 и TbCo_2 [6]. В связи с этим представляет значительный интерес изучение локального распределения атомов в $3d$ -подрешетке тройных интерметаллидов $R(\text{Fe}_{1-x}\text{Mn}_x)_2$ и установление его влияния на магнитные свойства соединений различного состава. Однако до настоящего времени систематические исследования подобного рода в литературе отсутствовали.

В работах [7—9] разработана методика мёссбауэровских исследований локального распределения атомов железа и марганца в сплавах со сложной атомно-кристаллической структурой и обнаружено атомное упорядочение в твердых растворах железа в α и β модификациях марганца.

Целью настоящей работы является экспериментальное изучение локального распределения атомов железа и марганца в квазибинарной системе интерметаллидов $\text{Er}(\text{Fe}_{1-x}\text{Mn}_x)_2$.