УДК 519.95

О ТОЧНОСТИ И НАДЕЖНОСТИ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ЭКСПЕРИМЕНТА

Ю. П. Пытьев

(кафедра математики)

В экспериментальных исследованиях, за редкими исключениями, могут быть измерены величины, лишь косвенно связанные с характеристиками f изучаемого объекта. Для широкого класса экспериментов характерна линейная схема измерения f

$$\xi = Af + \nu, \tag{1}$$

где ξ — результат измерения сигнала Af, ν — случайный сигнал, называемый шумом, определяющий погрешность измерения. В равенстве (1) ξ и ν — случайные векторы гильбертова пространства $\tilde{\mathcal{R}}_{\tilde{n}}$, f — вектор $\mathcal{R}_n$, A — линейный оператор, действующий из $\mathcal{R}_n$ в $\tilde{\mathcal{R}}_{\tilde{n}}$, описывающий измерительный прибор. Далее ξ будем интерпретировать как искаженный шумом ν выходной сигнал прибора A, на вход которого поступил сигнал f.

Равенство (1) связывает объект и его оптическое изображение, истинный контур спектральной линии и наблюдаемый на спектрографе и т. д.

Схеме измерения (1) свойственны искажения двух типов: приборные, определяемые оператором A и приводящие, например, к размытию сигнала f, и вызванные шумом ν. Последние охарактеризуем, задав среднее значение и корреляционный оператор ν. Очевидно, можно считать, что $\mathbf{E}\nu=0$. В таком случае корреляционный оператор Σ определится условием $(\Sigma x, y) = \mathbf{E}(\nu, x)(\nu, y)$ для любых векторов $x, y \in \tilde{\mathcal{R}}_{\tilde{n}}$, и мы получаем возможность записать следующее выражение для средней энергии шума: $\mathbf{E}\|\nu\|^2 = \mathrm{Tr}\,\Sigma$ *. Тем самым погрешность измерения охарактеризована количественно.

Если операторы A и Σ известны, будем говорить, что задана модель $[A, \Sigma]$ схемы измерения (1).

Для интерпретации измерения (1) желательно так преобразовать ξ, чтобы перечисленные искажения были в максимальной степени скомпенсированы. Пусть

$$R\xi = RAf + R\nu \tag{2}$$

— линейное преобразование ξ. Его следует понимать как искаженный шумом $R\nu$ выходной сигнал прибора RA, на вход которого поступил тот же сигнал f. Поэтому условимся $R\xi$ называть редукцией ξ к прибору RA.

Если в (2) $RA=I$, то речь идет о редукции к идеальному прибору. При этом в сигнале $R\xi = f + R\nu$ приборные искажения скомпенсированы полностью, и ошибка, возникающая при интерпретации $R\xi$ как f, равна $\mathbf{E}\|R\xi - f\|^2 = \mathbf{E}\|R\nu\|^2 = \mathrm{Tr}\,R\Sigma R^*$ при любом $f \in \mathcal{R}_n$. Однако условие $RA=I$ с математической точки зрения — весьма сильное условие на R. Для многих A такие R просто не существуют. Оно не разумно и с

---

* $\|\cdot\|$ — обозначение для нормы, $(\cdot, \cdot)$ — для скалярного произведения.

точки зрения приложений, поскольку на практике достаточно считать, что $RA=U$, где прибор U в известном смысле близок к «идеальному» I. В таком случае $R\xi=Uf+R\nu$ — искаженный шумом $R\nu$ выходной сигнал «почти идеального» прибора U, который к тому же можно выбрать так, чтобы значительно подавить шум $R\nu$ [1].

С теорией и приложениями методов редукции можно ознакомиться в работах [2—5]. Там, в частности, показано, что если R определить как решение задачи на минимум для погрешности редукции

$$\mathbf{E}\|R\xi-Uf\|^2=\mathbf{E}\|R\nu\|^2=\min\{\mathbf{E}\|R'\nu\|^2\,|\,R',\ R'A=U\},$$

то редукция к прибору U возможна, если и только если $U(I-A^-A)=0$ *; в случае невырожденного корреляционного оператора Σ редукция определяется единственным оператором $R=U(A^*\Sigma^{-1}A)^-A^*\Sigma^{-1}$ и погрешность редукции равна $h(U)=\mathbf{E}\|R\xi-Uf\|^2=\operatorname{Tr}U(A^*\Sigma^{-1}A)^-U^*$ для любого $f\in\mathcal{R}_n$. Для нас важно, что погрешность не зависит от f, от измерения ξ и определяется прибором U и моделью $[A,\Sigma]$. В частности, погрешность редукции к идеальному прибору определяется только моделью и равна $h(I)=\operatorname{Tr}(A^*\Sigma^{-1}A)^-$. Следовательно, погрешность является действительно важной характеристикой редукции только при условии, что принятая модель схемы измерения отвечает действительности. Поэтому при интерпретации результатов редукции данные о надежности модели не менее важны, чем величина погрешности.

Вопрос о надежности модели мы рассмотрим в предположении, что ν в (1) контролируется нормальным распределением $\mathcal{N}(0,\Sigma)$. Фактически речь пойдет только о надежности модели прибора, поскольку оператор Σ считается известным точно.

Для дальнейшего важен следующий результат [6].

Лемма 1. Пусть $\xi=Af+\nu$ при некотором $f\in\mathcal{R}_n$, $\nu-\mathcal{N}(0,\Sigma)$ нормальный случайный вектор из $\mathcal{R}_n$, $\hat{f}=(A^*\Sigma^{-1}A)^-A^*\Sigma^{-1}\xi$. Тогда статистики

$$t(\xi)=\|\Sigma^{-1/2}(\xi-A\hat{f})\|^2=\chi^2_m,\quad \|\Sigma^{-1/2}A(f-\hat{f})\|^2=\chi^2_s \tag{3}$$

независимы и контролируются χ^2-распределениями с $m=\tilde{n}-\operatorname{rank}A$ и $s=\operatorname{rank}A$ степенями свободы соответственно.

Если модель $[A,\Sigma]$ верна, статистика $t(\xi)$ при любом $f\in\mathcal{R}_n$ имеет одно и то же известное распределение. Этим мы воспользуемся при определении надежности модели. Вторая статистика в (3) определяет случайный эллипсоид $\{f\in\mathcal{R}_n,\ \|\Sigma^{-1/2}A(f-\hat{f})\|^2\leqslant\rho^2\}$, с вероятностью $P(\chi_s{}^2\leqslant\rho^2)$, покрывающий истинное значение f. Этот результат позволяет уточнить структуру погрешности в предположении нормальности ν.

Надежность модели — это, по существу, надежность представления измерения ξ в виде (1). Поэтому обсудим вначале задачу проверки гипотезы о том, что $\xi=Af+\nu$ при некотором $f\in\mathcal{R}_n$. Поскольку f — произвольный вектор из $\mathcal{R}_n$, речь идет о гипотезе, согласно которой $\xi=a+\nu$, где a — некоторый вектор из пространства значений $\mathcal{R}(A)$ оператора A. В качестве альтернативы примем условие $a\overline{\in}\mathcal{R}(A)$, поскольку при его выполнении модель должна быть отвергнута. Вместе с тем включение $a\in\mathcal{R}(A)$ еще не означает, что модель верна. В этом случае, например, допустима любая модель $[B,\Sigma]$, если $\mathcal{R}(B)\subset\mathcal{R}(A)$.

---

* Черточка у оператора означает псевдообращение [6]. Для любого оператора B: $B^-=\lim\limits_{\omega\to0}B^*(BB^*+\omega I)^{-1}$.

Итак, рассмотрим задачу проверки гипотезы $a\in\mathcal{R}(A)$ при альтернативе $a\overline{\in}\mathcal{R}(A)$, считая, что ν контролируется невырожденным нормальным распределением $\mathcal{N}(0, \Sigma)$. Нетрудно проверить, что критерий отношений правдоподобия [7] эквивалентен условию

$$t(\xi)=\|Q_m\Sigma^{-1/2}\xi\|^2\geqslant t, \tag{4}$$

в котором фигурирует первая статистика из (3), $Q_m=I-\Sigma^{-1/2}A(\Sigma^{-1/2}A)^-$ и $t=t_\alpha$ определяется по заданной вероятности α ошибочно отвергнуть гипотезу $a\in\mathcal{R}(A)$, называемой уровнем критерия (4),

$$P(\chi^2_{m,0}\geqslant t_\alpha)=\int\limits_{t_\alpha}^{\infty}p_{m,0}(z)\,dz=a,\quad 0<\alpha<1. \tag{5}$$

Здесь $p_{m,0}(z)$, $z>0$, — плотность χ^2-распределения с m степенями свободы, согласно которому распределена статистика $t(\xi)$, если $a\in\mathcal{R}(A)$, $\chi^2_{m,0}\equiv\chi^2_m$. Критерий (4), отвергающий гипотезу $a\in\mathcal{R}(A)$ всякий раз, когда результат измерения ξ удовлетворяет неравенству $t(\xi)\geqslant t_\alpha$, в случае верной модели будет давать в среднем $100\alpha\%$ ошибочных решений.

Если гипотеза и в самом деле неверна, то статистика $t(\xi)$ в (4) контролируется нецентральным χ^2-распределением с m степенями свободы и параметром нецентральности $\theta^2=t(a)=\|Q_m\Sigma^{-1/2}a\|^2$ [8]. В этом случае вероятность отвергнуть гипотезу $a\in\mathcal{R}(A)$, называемая мощностью критерия (4), равна $\beta(\alpha, \theta^2)=P(\chi^2_{m,\theta^2}\geqslant t_\alpha)=\int\limits_{t_\alpha}^{\infty}p_{m,\theta^2}(z)\,dz$. Здесь $p_{m,\theta^2}(z)$, $z>0$, — плотность χ^2-распределения с m степенями свободы и параметром нецентральности θ^2.

Очевидно, что при заданном $\alpha=\beta(\alpha, 0)$ критерий тем лучше, чем больше его мощность $\beta(\alpha, \theta^2)$, причем при любом $\theta^2>0$, поскольку параметр θ^2 априори неизвестен. Однако такие, как говорят, равномерно наиболее мощные критерии существуют далеко не всегда [7].

Покажем, что критерий (4) является равномерно наиболее мощным в классе инвариантных критериев, о которых сейчас пойдет речь.

Лемма 2. Пусть $\mathcal{G}$ — группа ортогональных преобразований $\tilde{\mathcal{R}}_{\tilde{n}}$, оставляющих инвариантным $\mathcal{R}(\Sigma^{-1/2}A)$, $\mathcal{H}=\{(H, h)\}$ — группа движений $\tilde{\mathcal{R}}_{\tilde{n}}$, таких, что $(H, h)x=Hx+h$, $x\in\tilde{\mathcal{R}}_{\tilde{n}}$, где $H=\Sigma^{1/2}G\Sigma^{1/2}$, $G\in\mathcal{G}$, и $h\in\mathcal{R}(A)$. Тогда: 1) для любого измеримого множества $\mathcal{M}\subset\tilde{\mathcal{R}}_{\tilde{n}}$ и любого движения $(H, h)\in\mathcal{H}$: $P_a(\eta\in(H,h)^{-1}\mathcal{M})=P_{(H,h)a}(\eta\in\mathcal{M})$, где $P_a(\eta\in\mathcal{M})$ — вероятность включения $\eta\in\mathcal{M}$, η—случайный $\mathcal{N}(a,\Sigma)$ вектор $\tilde{\mathcal{R}}_{\tilde{n}}$, $(H, h)^{-1}\mathcal{M}=\{(H, h)x=H^{-1}(x-h),\ x\in\mathcal{M}\}$; 2) $(H, h)a\in\mathcal{R}(A)$, если и только если $a\in\mathcal{R}(A)$; 3) для любых $x, x'\in\tilde{\mathcal{R}}_{\tilde{n}}$ $t(x)=t(x')$, если и только если $x'=(H, h)x$ для некоторого движения $(H, h)\in\mathcal{H}$.

Доказательство. Первое утверждение следует из цепочки равенств

$$P_a(\eta\in(H, h)^{-1}\mathcal{M})=\int\limits_{(H,h)^{-1}\mathcal{M}}p_a(x)\,dx=\int\limits_{\mathcal{M}}p_a((H, h)^{-1}x)\,|\det H|\,dx=$$

$$=\int\limits_{\mathcal{M}}p_{(H,h)a}(x)\,dx=P_{(H,h)a}(\eta\in\mathcal{M}),$$

где

$$p_a(x) = (2\pi)^{-\tilde{n}/2} \det \Sigma^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\Sigma^{-1/2}(x-a)\right\}, \quad x \in \tilde{\mathcal{R}}_{\tilde{n}},$$

— плотность нормального распределения $\mathcal{N}(a, \Sigma)$ и использованы равенства $\det H = \pm 1$, $\|\Sigma^{-1/2}(H^{-1}(x-h)-a)\| = \|G^{-1}\Sigma^{-1/2}(x-Ha-h)\| = \|\Sigma^{-1/2}(x-(H, h)a)\|$. Второе утверждение следует из эквивалентности включений $H^{-1}(x-h) \in \mathcal{R}(A)$ и $x \in H\mathcal{R}(A)+h = \Sigma^{1/2}G\Sigma^{-1/2}\mathcal{R}(A)+h = \mathcal{R}(A)+h = \mathcal{R}(A)$. Равенство $t((H, h)x) = t(x)$, $x \in \tilde{\mathcal{R}}_{\tilde{n}}$, $(H, h) \in \mathcal{H}$, проверяется непосредственно. Наоборот, если $t(x) = t(x')$, то существует ортогональное преобразование $G \in \mathcal{G}$, такое, что $GQ_m\Sigma^{-1/2}x = Q_m\Sigma^{-1/2}x'$, ибо Q_m — ортогональный проектор на $\mathcal{R}^{\perp}(\Sigma^{-1/2}A)$ [6]. Поскольку $Q_mG = GQ_m$, то $Q_m\Sigma^{-1/2}\times(Hx-x') = 0$ и, следовательно, $x' = Hx+h$ при некотором $h \in \mathcal{R}(A)$. ▲

Согласно лемме 2, семейство распределений $\{\mathcal{N}(a, \Sigma), a \in \tilde{\mathcal{R}}_{\tilde{n}}\}$, задача проверки гипотезы $a \in \mathcal{R}(A)$ при альтернативе $a \overline{\in} \mathcal{R}(A)$ и критерий (4) $\mathcal{H}$-инвариантны. Из первых двух утверждений следует, что в дальнейшем естественно ограничиться изучением лишь $\mathcal{H}$-инвариантных критериев.

Покажем, что среди $\mathcal{H}$-инвариантных критериев критерий (4) является равномерно наиболее мощным. Заметим, что гипотеза $a \in \mathcal{R}(A)$ (альтернатива $a \overline{\in} \mathcal{R}(A)$) эквивалентна предположению о том, что статистика $t(\xi)$ распределена как $\chi^2_{m,0}$ (χ^2_{m,θ^2} с некоторым $\theta^2 > 0$). В задаче проверки гипотезы $\theta^2 = 0$ при (частной) альтернативе $\theta^2 = \theta_0^2 > 0$ наиболее мощный критерий определяется условием $t(\xi) \in Z_\alpha$, где $Z_\alpha = \{z > 0, \ p_{m,\theta_0^2}(z)/p_{m,0}(z) \geqslant c_\alpha\}$ — так называемое критическое множество уровня α, c_α определяется из уравнения $P(\chi^2_{m,0} \in Z_\alpha) = \int_{Z_\alpha} p_{m,0}(z)\,dz = \alpha$. Это утверждение известно как лемма Неймана—Пирсона [7]. Так как

$$\frac{p_{m,\theta^2}(z)}{p_{m,0}(z)} = \frac{\exp(-\theta^2/2)\,\Gamma(m/2)}{\Gamma(1/2)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\theta^2 z)^j}{(2j)!} \frac{\Gamma(j+1/2)}{\Gamma(j+m/2)}$$

— монотонно возрастающая функция $z>0$ при любом $\theta^2>0$, критическое множество Z_α не зависит от θ^2 и может быть записано в виде $Z_\alpha = \{z \geqslant t_\alpha\}$, где t_α определено в (5). Этот вывод означает, что *критерий (4) является равномерно наиболее мощным в классе $\mathcal{H}$-инвариантных критериев,* поскольку из утверждения 3 леммы 2 следует, что любой $\mathcal{H}$-инвариантный критерий должен иметь вид $t(\xi) \in Z_\alpha$, ибо $t(\cdot)$ — максимальный $\mathcal{H}$-инвариант (т. е. любой $\mathcal{H}$-инвариант может быть выражен как функция от $t(\cdot)$).

Итак, чем больше $t(\xi)$, тем хуже согласуется измерение ξ с предположением $a \in \mathcal{R}(A)$, и если $t(\xi) \geqslant t_\alpha$, то модель $[A, \Sigma]$ классифицируется как противоречащая ξ.

Определение. Статистика $\alpha(\xi) = \inf\{\alpha \mid t(\xi) \in Z_\alpha\}$ называется надежностью модели $[A, \Sigma]$.

Согласно определению и критерию (4), $\alpha(\xi)$ — минимальная вероятность ошибочно отвергнуть модель в связи с измерением ξ, и если $\alpha(\xi)$ мало, то измерение ξ демонстрирует невысокую надежность модели.

Надежность модели является случайной величиной, распределение которой зависит от того, какая из альтернатив верна.

Теорема. Для каждого θ^2 надежность $\alpha(\xi)$ распределена на $[0, 1]$ с плотностью

$$p_\alpha(x) = \frac{e^{-\theta^2/2}\Gamma(m/2)}{\Gamma(1/2)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(t_m(x)\theta^2)^j}{(2j)!} \frac{\Gamma(j+1/2)}{\Gamma(j+m/2)}, \tag{6}$$

где $t_m(x)$ определяется условием

$$\int_{t_m(x)}^{\infty} p_{m,0}(z)\,dz = x, \quad 0 < x \leqslant 1. \tag{7}$$

В частности, если модель верна, то $\alpha(\xi)$ равномерно распределена на $[0, 1]$. В противном случае $p_\alpha(x) \to \infty$ при $x \to 0$.

Доказательство. Действительно,

$$\alpha(\xi) = \int_{t(\xi)}^{\infty} p_{m,0}(z)\,dz.$$

Следовательно,

$$P(\alpha(\xi) > x) = P(t(\xi) < t_m(x)) = \int_0^{t_m(x)} p_{m,\theta^2}(z)\,dz,$$

где $t_m(x)$ определено условием (7). Выражение (6) получается отсюда дифференцированием. Последнее утверждение следует из выражения для $p_\alpha(\cdot)$ (6). ▲

Таким образом, не следует думать, что надежность непременно принимает большие значения, если модель верна. В этом случае все значения надежности от нуля до единицы равновероятны. Если же модель не верна, то более вероятны значения надежности, близкие к нулю.

Заметим, что данное определение надежности без труда переносится на случай произвольного $\mathscr{H}$-инвариантного распределения ν.

Если распределение ν задано лишь корреляционным оператором Σ и нулевым средним, а в остальном произвольно, то можно получить оценку надежности сверху. Действительно, если $a \in \mathscr{R}(A)$, то $\mathrm{E}t(\xi) = \mathrm{Tr}\, Q_m = m$ и, согласно неравенству Чебышева, $P(t(\xi) \geqslant \varepsilon^2) \leqslant m/\varepsilon^2$. Поэтому искомая оценка надежности имеет вид $\alpha(\xi) \leqslant m/t(\xi)$. В таблице приведены сравнительные данные о надежности при $m = 10$.

Значения статистики $t(\xi)$	18,3	23,2	29,6
Надежность при нормальном распределении ν, $a \in \mathscr{R}(A)$	0,05	0,01	0,001
Оценка сверху для надежности при неизвестном распределении ν, $a \in \mathscr{R}(A)$	0,546	0,431	0,338

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Пытьев Ю. П. Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон., 1983, 24, № 5, с. 19. [2] Пытьев Ю. П. Матем. сб., 1983, 120, № 2, с. 240. [3] Николаев В. И. и др. ДАН СССР, 1981, 260, с. 848. [4] Бормот О. В. и др. В кн.: Тез. доклад. II Всесоюз. совещ. по физ. взаимодействия заряж. частиц с монокристаллами. М.: Изд-во МГУ, 1981. [5] Варламов В. В. и др. Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон.,

1984, 25, № 4, с. 53. [6] Пытьев Ю. П. Матем. сб., 1982, 118, № 1, с. 19. [7] Леман Э. Проверка статистических гипотез. М.: Наука, 1979. [8] Андерсон Т. Введение в многомерный статистический анализ. М.: Физматгиз, 1963.

Поступила в редакцию
23.04.85

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1986, Т. 27, № 3

УДК 517.958:621.372.8.001.24

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА В ПОЛОСЕ С КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМИ НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

В. П. Моденов

(кафедра математики)

В решении самых различных задач математической физики находит широкое применение метод Галеркина. Известны различные схемы этого метода. Одни сводят решение краевой задачи для уравнений в частных производных к решению системы алгебраических уравнений, другие — к решению линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (неполный метод Галеркина [1]).

Вместе с тем, как показала практика решения целого ряда задач, применение схем метода Галеркина, основанных на разложении решения по неортогональной системе комплексных базисных функций, при численной реализации на ЭВМ часто сопряжено со значительными техническими трудностями. Поэтому для решения этих задач оказывается более эффективным применение схемы метода Галеркина в комплексном пространстве, где базисная система комплексных функций ортогональна (ортогональный метод Галеркина).

На основе идеи записи условия ортогональности системы комплексных функций через скалярное произведение без введения операции комплексного сопряжения [2], в работах [3, 4] на примере решения несамосопряженных краевых задач теории волноводов дано обобщение метода Галеркина на комплексное пространство с псевдоскалярным произведением, в котором система комплексных собственных функций является ортогональной. Эта схема ортогонального метода Галеркина, построенная как обобщение неполного метода Галеркина на пространство с псевдоскалярным произведением, была успешно применена при математическом моделировании современных резонансных волноводных СВЧ-устройств [5].

Целью данной работы является построение схемы ортогонального метода Галеркина на основе обобщения на комплексное пространство с псевдоскалярным произведением метода частичных областей и применение ее к решению краевой задачи для уравнения Гельмгольца в полосе с кусочно-постоянными несамосопряженными граничными условиями импедансного вида. Ортогональный метод Галеркина позволяет свести решение данной задачи к решению системы линейных алгебраических уравнений, порядок которой в два раза меньше порядка системы, получаемой по традиционной схеме метода Галеркина.

1. Постановка краевой задачи и метод ее решения. Математическая задача заключается в нахождении решения $u(x, z)$ уравнения Гельмгольца

$$\Delta u(x, z)+k^2\varepsilon(z)u(x, z)=0 \qquad (1)$$