

УДК 517.958:621.372.8.001.24

**РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА В ПОЛОСЕ  
С КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМИ НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫМИ  
ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ**

**В. П. Моденов**

*(кафедра математики)*

В решении самых различных задач математической физики находит широкое применение метод Галеркина. Известны различные схемы этого метода. Одни сводят решение краевой задачи для уравнений в частных производных к решению системы алгебраических уравнений, другие — к решению линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (неполный метод Галеркина [1]).

Вместе с тем, как показала практика решения целого ряда задач, применение схем метода Галеркина, основанных на разложении решения по ортогональной системе комплексных базисных функций, при численной реализации на ЭВМ часто сопряжено со значительными техническими трудностями. Поэтому для решения этих задач оказывается более эффективным применение схемы метода Галеркина в комплексном пространстве, где базисная система комплексных функций ортогональна (ортогональный метод Галеркина).

На основе идеи записи условия ортогональности системы комплексных функций через скалярное произведение без введения операции комплексного сопряжения [2], в работах [3, 4] на примере решения несамосопряженных краевых задач теории волноводов дано обобщение метода Галеркина на комплексное пространство с псевдоскалярным произведением, в котором система комплексных собственных функций является ортогональной. Эта схема ортогонального метода Галеркина, построенная как обобщение неполного метода Галеркина на пространство с псевдоскалярным произведением, была успешно применена при математическом моделировании современных резонансных волноводных СВЧ-устройств [5].

Целью данной работы является построение схемы ортогонального метода Галеркина на основе обобщения на комплексное пространство с псевдоскалярным произведением метода частичных областей и применение ее к решению краевой задачи для уравнения Гельмгольца в полосе с кусочно-постоянными несамосопряженными граничными условиями импедансного вида. Ортогональный метод Галеркина позволяет свести решение данной задачи к решению системы линейных алгебраических уравнений, порядок которой в два раза меньше порядка системы, получаемой по традиционной схеме метода Галеркина.

**1. Постановка краевой задачи и метод ее решения.** Математическая задача заключается в нахождении решения  $u(x, z)$  уравнения Гельмгольца

$$\Delta u(x, z) + k^2 \varepsilon(z) u(x, z) = 0 \quad (1)$$

в полосе  $\Pi = \{0 \leq x \leq 1, -\infty < z < +\infty\}$ ,  
где

$$\varepsilon(z) = \begin{cases} \varepsilon^{(1)}, & \text{если } z < 0, \\ \varepsilon^{(2)}, & \text{если } z > 0. \end{cases}$$

Это решение должно удовлетворять:

1) граничным условиям импедансного вида

$$\frac{\partial u}{\partial x} - h(z)u \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + h(z)u \Big|_{x=1} = 0, \quad (2)$$

где

$$h(z) = \begin{cases} h^{(1)}, & \text{если } z < 0, \\ h^{(2)}, & \text{если } z > 0, \end{cases}$$

$h^{(1)}$  и  $h^{(2)}$  — приведенные импедансы (в общем случае комплексные величины);

2) условиям сопряжения

$$L_1[u] = [u] \Big|_{z=0} = 0, \quad L_2[u] = [\partial u / \partial z] \Big|_{z=0} = 0, \quad (3)$$

следующим из требования непрерывности касательных компонент векторов напряженности электрического и магнитного типов;

3) условиям возбуждения и излучения (временная зависимость в виде  $\exp(-i\omega t)$ )

$$u(x, z) = \begin{cases} X_{n_0}^{(1)}(x) \exp(i\gamma_{n_0}^{(1)}z) + \sum_{n=1}^{\infty} R_n X_n^{(1)}(x) \exp(-i\gamma_n^{(1)}z), & \text{если } z \leq 0; \\ \sum_{n=1}^{\infty} T_n X_n^{(2)}(x) \exp(i\gamma_n^{(2)}z), & \text{если } z \geq 0, \end{cases} \quad (4)$$

$$(\operatorname{Im} \gamma_n^{(1)} > 0, \operatorname{Im} \gamma_n^{(2)} > 0),$$

где  $n_0$  — номер нормальной волны единичной амплитуды;  $R_n$  и  $T_n$  — комплексные коэффициенты отражения и прохождения, которые требуется вычислить;  $\{X_n^{(i)}(x)\}$  — система комплексных собственных функций несамосопряженной задачи типа Штурма—Лиувилля

$$X_n^{(i)'}(x) + \lambda_n^{(i)2} X_n^{(i)}(x) = 0, \quad X_n^{(1)'}(0) - h^{(1)} X_n^{(1)}(0) = 0, \quad X_n^{(2)'}(1) + h^{(2)} X_n^{(2)}(1) = 0,$$

которая соответствует системе комплексных собственных значений  $\lambda_n^{(i)}$ ;

$$\gamma_n^{(i)} = \sqrt{k^2 \varepsilon^{(i)} - \lambda_n^{(i)2}}.$$

Эти функции имеют вид

$$X_n^{(i)}(x) = (\lambda_n^{(i)} \cos \lambda_n^{(i)} x + h^{(i)} \sin \lambda_n^{(i)} x) / \sqrt{\lambda_n^{(i)2} + h^{(i)2}}, \quad (i = 1, 2).$$

Спектральные уравнения для определения комплексных собственных значений  $\lambda_n^{(i)}$  являются трансцендентными:

$$F(\lambda_n^{(i)}) = \operatorname{tg} \lambda_n^{(i)} - 2\lambda_n^{(i)} h^{(i)} / (\lambda_n^{(i)2} - h^{(i)2}) = 0 \quad (5)$$

и при условиях невырожденности [3]

$$\lambda_n^{(i)2} + h^{(i)2} \neq 0, \quad \lambda_n^{(i)2} + h^{(i)2} + 2h^{(i)} \neq 0 \quad (6)$$

имеют только простые корни. В частности, в наиболее распространенном на практике случае  $|\operatorname{Re} h^{(i)}| \gg |\operatorname{Im} h^{(i)}|$  эти условия выполнены [6].

В комплексном пространстве  $L_2(0, 1)$  с псевдоскалярным произведением

$$(f, g) = \int_0^1 f(x) g(x) dx$$

системы комплексных собственных функций  $\{X_n^{(i)}(x)\}$  ортогональны:

$$\int_0^1 X_n^{(i)} X_m^{(i)} dx = \|X_n^{(i)}\|^2 \delta_{mn}, \quad (7)$$

где

$$\|X_n^{(i)}\|^2 = [\lambda_n^{(i)^2} + h^{(i)^2} + 2h^{(i)}] / [2(\lambda_n^{(i)^2} + h^{(i)^2})], \text{ причем } \|X_n^{(i)}\|^2 \neq 0$$

в силу условий (6). Можно доказать также, что в рассматриваемом пространстве системы функций  $\{X_n^{(i)}(x)\}$  являются полными.

Приближенное решение задачи будем искать в виде

$$u^N(x, z) = \begin{cases} X_{n_0}^{(1)}(x) \exp(i\gamma_{n_0}^{(1)} z) + \sum_{m=1}^N R_m^N X_m^{(1)}(x) \exp(-i\gamma_m^{(1)} z), & \text{если } z \leq 0; \\ \sum_{m=1}^N T_m^N X_m^{(2)}(x) \exp(i\gamma_m^{(2)} z), & \text{если } z \geq 0, \end{cases} \quad (8)$$

где  $R_m^N$  и  $T_m^N$  — приближенные значения искомых коэффициентов отражения и прохождения. Функция  $u^N(x, z)$  удовлетворяет уравнению Гельмгольца (1), граничным условиям (2), условиям возбуждения и излучения (4). Удовлетворим условиям сопряжения (3) в интегральном смысле.

Согласно ортогональному методу Галеркина потребуем выполнения условий ортогональности операторов  $L_1[u^N]$  и  $L_2[u^N]$  соответственно  $N$  первым собственным функциям  $\{X_n^{(2)}\}$  и  $\{X_n^{(1)}\}$ :

$$(L_1[u^N], X_n^{(2)}) = 0, \quad (L_2[u^N], X_n^{(1)}) = 0,$$

т. е.

$$\int_0^1 [u^N]|_{z=0} X_n^{(2)} dx = 0; \quad \int_0^1 [\partial u^N / \partial z]|_{z=0} X_n^{(1)} dx = 0. \quad (9)$$

Подставляя разложения (7) в проекционные соотношения (9) и воспользовавшись условием ортогональности (7), получим для нахождения коэффициентов  $R_n^N$  и  $T_n^N$  систему линейных алгебраических уравнений

$$T_p^N = \sum_{m=1}^N S_{pm} (\delta_{mn_0} + R_m^N) / \|X_p^{(2)}\|^2, \quad (10)$$

$$R_n^N = \delta_{nn_0} - \sum_{p=1}^N \gamma_p^{(2)} S_{pn} T_p^N / \gamma_n^{(1)} \|X_n^{(1)}\|^2, \quad (11)$$

где  $S_{mn} = \int_0^1 X_n^{(1)} X_m^{(2)} dx \quad (n = 1, 2, \dots, N)$ .

Исключая из системы (10), (11) коэффициенты  $T_p^N$ , получим для определения приближенных значений коэффициентов отражения  $R_n^N$  следующую систему  $N$  линейных алгебраических уравнений:

$$R_n^N = F_n + \sum_{m=1}^N A_{nm} R_m^N, \quad (12)$$

где

$$A_{nm} = - \sum_{p=1}^N \gamma_p^{(2)} S_{pn} S_{pm} / \gamma_n^{(1)} \|X_n^{(1)}\|^2 \|X_p^{(2)}\|^2,$$

$$F_n = \delta_{nn_0} + A_{nn_0} \quad (n = 1, 2, \dots, N).$$

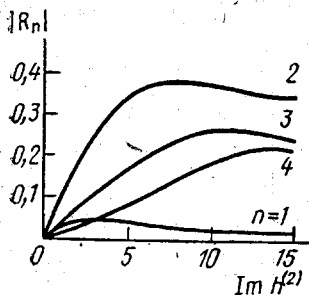
Отсюда приближенные значения коэффициентов прохождения могут быть определены из соотношений (10).

Система (12) совпадает с редуцированной из бесконечной системы алгебраических уравнений, которая может быть получена, например, по методу проекционного сшивания [7]. Эта бесконечная система является системой фредгольмоваго типа и поэтому имеет единственное решение в классе  $l_2$  ограниченных последовательностей, которое может быть получено редукцией с любой степенью точности [8]. Являясь, кроме того, регулярной, она допускает применение метода последовательных приближений [9].

Следовательно, найденные из соотношений (12) и (10) приближенные значения коэффициентов отражения  $R_n^N$  и прохождения  $T_n^N$  при  $N \rightarrow \infty$  сходятся в пространстве  $l_2$  к точным значениям  $R_n$  и  $T_n$ .

**2. Численный пример.** Проиллюстрируем предлагаемую схему ортогонального метода Галеркина на примере решения задачи дифракции волны  $H_{10}$  на сочленении двух полубесконечных плоских волноводов с различными поверхностными импедансами и различным диэлектрическим заполнением.

На рисунке приведена посчитанная на ЭВМ зависимость модулей коэффициентов отражения от величины мнимой части приведенного поверхностного импеданса  $h^{(2)}$



при падении волны  $H_{10}$  из полубесконечного плоского волновода с импедансными стенками без потерь на сочленение с полубесконечным плоским импедансным волноводом с потерями. На рассматриваемом сочленении происходит трансформация волны  $H_{10}$  в волны типа  $H_{n0}$ , причем наибольшее значение коэффициента отражения имеет волна  $H_{20}$ . При стремлении  $\text{Im } h^{(2)}$  к бесконечности модули коэффициентов отражения стремятся к нулю. Счет проводился при следующих значениях параметров:  $N=10$ ,  $\epsilon^{(1)} = \epsilon^{(2)} = 1$ ,  $\text{Re } h^{(1)} = \text{Re } h^{(2)} = 1$ ,  $\text{Im } h^{(1)} = 0$ .

В заключение отметим, что аналогично решается краевая задача для уравнения Гельмгольца, если полоса  $\Pi = \{0 \leq x \leq 1, -\infty < z < +\infty\}$  разбита конечным числом сечений  $z = \text{const}$  на ряд частичных областей, на границе которых при  $x=0$  и  $x=1$  задаются постоянные граничные условия импедансного вида (2).

На основе предлагаемой схемы ортогонального метода Галеркина могут быть разработаны эффективные алгоритмы решения на ЭВМ целого класса задач теории волноводов, связанных с математическим моделированием различного рода резонансных волноводных фильт-

ров, трансформаторов и других устройств с учетом конечной проводимости мегалла и потерь в диэлектрике [5], а также с расчетом на основе импедансной модели гофрированных, гребенчатых [6] и оптических волноводов [4].

Автор выражает глубокую благодарность А. Г. Свешникову,

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Тихонов А. Н., Ильинский А. С., Свешников А. Г. В кн.: Проблемы вычислительной математики. М.: Изд-во МГУ, 1980, с. 82. [2] Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны. М.: Сов. радио, 1957. [3] Моденов В. П. Вестн. Моск. ун-та. Вычисл. матем. и киберн., 1981, № 4, с. 43. [4] Моденов В. П., Свешников А. Г. Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон., 1985, 26, № 2, с. 3. [5] Гладун В. В. и др. Препринт физ. фак. МГУ № 22/1984. М., 1984. [6] Ильинский А. С., Слепян Г. Я. Колебания и волны в электродинамических системах с потерями. М.: Изд-во МГУ, 1983. [7] Богданов Ф. Г., Кеванишвили Г. Ш. Изв. вузов. Радиофизика, 1980, 23, № 2, с. 213. [8] Шестопалов В. П., Литвиненко Л. Н., Масалов С. И., Сологуб В. Г. Дифракция волн на решетках. Харьков: Изд-во ХГУ, 1973. [9] Иванов Е. А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968.

Поступила в редакцию  
19.04.85

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1986, Т. 27, № 3

## АТОМНАЯ И ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА

УДК 523:165

### ЭКСПЕРИМЕНТ ПО ИССЛЕДОВАНИЮ ЯДЕРНОГО СОСТАВА И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СПЕКТРОВ СОЛНЕЧНЫХ КОСМИЧЕСКИХ ЛУЧЕЙ НА ИСЗ «ПРОГНОЗ-9»

С. А. Беляков, Ю. П. Гордеев, Ю. И. Денисов, Г. Я. Колесов,  
А. Н. Подорольский, Б. А. Никитин \*

(НИИЯФ)

На борту ИСЗ «Прогноз-9», запущенного в СССР 1 июля 1983 г. [1], была установлена аппаратура, в состав которой входил прибор СКИ-1, предназначенный для проведения измерений межпланетных потоков ядерной компоненты солнечных космических лучей (СКЛ). Благодаря большой вытянутости орбиты (апогей 720 тыс. км, период обращения 27 сут) спутник в основном находился в значительном удалении от Земли, вследствие чего существенно уменьшилось влияние ее магнитосферы на результаты измерения потоков ядер в межпланетном пространстве.

Прибор СКИ-1 является дальнейшим развитием методических разработок, заложенных в приборах СЭЗ-3 и СЭЗ-3М. С помощью приборов типа СЭЗ-3, работавших на автоматических станциях «Прогноз», «Прогноз-2» и «Прогноз-3», получена обширная информация о динамике потоков низкоэнергичных протонов и ядер гелия СКЛ [2]. Прибор СЭЗ-3М, предназначенный для измерения потоков ядер с зарядами  $1 \leq z \leq 8$ , позволил впервые в СССР на станции «Прогноз-5» провести измерения изотопного состава и энергетических спектров потоков ядер гелия от малых солнечных вспышек [3].

\* Всесоюзный научно-исследовательский институт источников тока.