ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 539.12.164

РЕЛЯТИВИСТСКИЙ СПЕКТР ДВУХМЕЗОННОГО СВЯЗАННОГО СОСТОЯНИЯ В СКАЛЯРНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

А. П. Мартыненко, Р. Н. Фаустов

(кафедра квантовой статистики и теории поля)

1. Введение. Локальное квазипотенциальное уравнение, предложенное для описания релятивистских двухчастичных связанных систем в квантовой теории поля [1—4], оказывается очень удобным при вычислении энергетических спектров связанных состояний [5, 6]. Успех применения локального квазипотенциального уравнения связан с его шредингеровским видом и наличием точного решения для основной части оператора взаимодействия частиц, который строится в таком подходе по теории возмущений [1, 5, 7]. В спинорной электродинамике удается таким образом рассчитать релятивистские спектры водородоподобного атома и позитрония с точностью α^4 $(\alpha=e^2/(4\pi)$ — постоянная тонкой структуры) [7]. Другой перенормируемой теорией электромагнитного взаимодействия является скалярная электродинамика [8, 9]. Изучение связанных состояний двух мезонов спина 0 в рамках этой теории, с одной стороны, дает возможность сопоставить полученные результаты со спинорной электродинамикой и прояснить роль спина в последней. С другой стороны, существование реальных физических связанных систем скалярных мезонов (π^-K^+, $\pi^-\pi^+$-системы) [10] может дать возможность экспериментальной проверки теоретических построений самой скалярной электродинамики.

Рассмотрим электромагнитное взаимодействие двух мезонов с массами m_1, m_2, зарядами $-e$, Ze и спином 0 в системе центра масс, определив относительный 4-импульс p и полный 4-импульс $\mathcal{P}$ частиц следующими выражениями:

$$p=\frac{E_2}{M}p_1-\frac{E_1}{M}p_2,\quad E_1=\frac{M^2-m_2^2+m_1^2}{2M},\quad E_2=\frac{M^2-m_1^2+m_2^2}{2M}, \tag{1}$$

$$\mathcal{P}=p_1+p_2=q_1+q_2. \tag{2}$$

Здесь p_1, p_2 — 4-импульсы частиц в начальном состоянии; q_1, q_2 — в конечном состоянии; $M=E_1+E_2$ — масса связанного состояния.

На массовой поверхности частиц получаем соотношения

$$p_1^2=m_1^2,\quad p_2^2=m_2^2,\quad p\cdot\mathcal{P}=0,$$

$$\mathbf{p}^2=\mathbf{q}^2=b^2=[M^2-(m_1+m_2)^2][M^2-(m_1-m_2)^2]/(4M^2). \tag{3}$$

Двухчастичное связанное состояние описывается в системе центра масс следующим локальным квазипотенциальным уравнением [6, 7]:

$$\left(\frac{b^2}{2\mu_R}-\frac{\mathbf{p}^2}{2\mu_R}\right)\Psi_M(\mathbf{p})=\int V(\mathbf{p},\mathbf{q},M)\,\Psi_M(\mathbf{q})\frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3}, \tag{4}$$

где μ_R — релятивистская приведенная масса двух частиц [7]:

$$\mu_R=\frac{E_1E_2}{E_1+E_2}=\frac{E_1E_2}{M}=\frac{M^4-(m_1^2-m_2^2)^2}{4M^3}. \tag{5}$$

Квазипотенциальная волновая функция $\Psi_M(p)$ может быть найдена из уравнения (4), если известен способ построения оператора взаимодействия $V(\mathbf{p}, \mathbf{q}; M)$. Квазипотенциал $V(\mathbf{p}, \mathbf{q}, M)$ связан с амплитудой упругого рассеяния двух частиц $T(\mathbf{p}, \mathbf{q}, M)$ уравнением типа Липпмана — Швингера [5, 6]:

$$T(\mathbf{p}, \mathbf{q}, M) = V(\mathbf{p}, \mathbf{q}, M) + \int \frac{V(\mathbf{p}, \mathbf{k}, M)\, T(\mathbf{k}, \mathbf{q}, M)}{b^2/(2\mu_R) - \mathbf{k}^2/(2\mu_R)} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}. \tag{6}$$

2. Построение квазипотенциала однофотонного обмена и релятивистские поправки. Оператор взаимодействия $V(\mathbf{p}, \mathbf{q}, M)$ строится в квазипотенциальном подходе по теории возмущений с помощью амплитуды рассеяния вне массовой поверхности $T(\mathbf{p}, \mathbf{q}, M)$ при нулевой относительной энергии частиц [1, 5]:

$$p^0 = \frac{E_2}{M} p_1^0 - \frac{E_1}{M} p_2^0 = 0,$$
$$q^0 = \frac{E_2}{M} q_1^0 - \frac{E_1}{M} q_2^0 = 0. \tag{7}$$

Для получения выражения $V(\mathbf{p}, \mathbf{q}, M)$ необходимо в нормировочных множителях $[2\varepsilon_{1,2}(\mathbf{p})]^{-1/2}$, соответствующих внешним линиям диаграмм, произвести замену

$$\varepsilon_{1,2}(\mathbf{p}) = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_{1,2}^2} \to E_{1,2}(M). \tag{8}$$

Мезон-мезонное взаимодействие в низшем порядке теории возмущений определяется однофотонным обменом, который при условиях (7), (8) и выборе диагональной калибровки для пропагатора фотона [11] приводит к квазипотенциалу

$$V_\gamma(\mathbf{p}, \mathbf{q}, M) = T_\gamma(\mathbf{p}, p^0 = 0, \mathbf{q}, q^0 = 0, M)|_{\varepsilon_{1,2} \to E_{1,2}} =$$
$$= \frac{(-Ze^2)(p_1 + q_1)_\mu (p_2 + q_2)_\mu}{4E_1E_2k^2} = \frac{-4\pi Z\alpha}{\mathbf{k}^2} \left\{ \left[1 + \frac{b^2}{E_1E_2} \right] + \right.$$
$$\left. + \frac{\mathbf{p}^2 - b^2}{E_1E_2} - \frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{k})}{E_1E_2} + \frac{\mathbf{k}^2}{4E_1E_2} \right\}, \quad \mathbf{k} = \mathbf{p} - \mathbf{q}. \tag{9}$$

Для получения релятивистского спектра связанного состояния двух мезонов выберем в качестве исходного приближения для квазипотенциала в уравнении (4) модифицированный кулоновский потенциал:

$$V^C(\mathbf{p}, \mathbf{q}, M) = \frac{-4\pi Z\alpha}{\mathbf{k}^2} \left(1 + \frac{b^2}{E_1E_2} \right), \tag{10}$$

который получается из $V_\gamma(\mathbf{p}, \mathbf{q}, M)$, если в фигурных скобках выражения (9) положить $\mathbf{p}^2 = \mathbf{q}^2 = b^2$, $\mathbf{k} = 0$. Квазипотенциал (10) приводит к следующей релятивистской формуле Бальмера [6, 7]:

$$M_n^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2 \left(1 + (Z\alpha)^2/n^2\right)^{-1/2}, \tag{11}$$

$n = 1, 2, 3, \ldots$ — главное квантовое число.

Разложение (11) по α^2 определяет релятивистские поправки в спектре энергии связи $B = M - m_1 - m_2$ двухчастичной системы [6, 7, 12]:

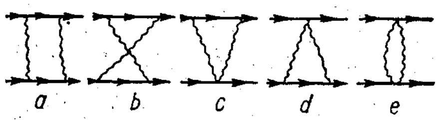
$$B_n = -\frac{\mu (Z\alpha)^2}{2n^2} + \frac{3\mu (Z\alpha)^4}{8n^4} - \frac{\mu^3 (Z\alpha)^4}{8m_1m_2n^4}, \quad \mu = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}. \tag{12}$$

Вычисление поправок порядка α^4 в спектре энергии B удобно проводить в координатном пространстве. С этой целью используем преобразование Фурье [12, 13] оператора однофотонного взаимодействия (9), а разность ($\mathbf{p}^2-b^2$) заменим величиной $2\mu_R V^C$, имея в виду дальнейшее усреднение взаимодействия по волновым функциям уравнения (4) с потенциалом (10). В результате однофотонное взаимодействие в координатном пространстве примет вид

$$V_\gamma(r) = \frac{-Z\alpha}{r}\left(1 + \frac{b^2}{E_1E_2}\right) - \frac{2\mu (Z\alpha)^2}{m_1 m_2 r^2} - $$
$$- \frac{Z\alpha}{m_1 m_2}\frac{(\mathbf{r}\nabla)}{r^3} - \frac{\pi Z\alpha}{m_1 m_2}\delta(\mathbf{r}) + o\left(\frac{1}{m_{1,2}^2}\right). \qquad (13)$$

Необходимые вклады в спектр энергии B порядка α^4 определяются также амплитудами двухфотонных процессов.

3. Двухфотонное взаимодействие скалярных частиц. Мезон-мезонное взаимодействие, обусловленное обменом двумя фотонами, описывается в скалярной электродинамике диаграммами Фейнмана, изображенными на рисунке [8].



Оператор взаимодействия уравнения (4) во втором порядке теории возмущений имеет вид [1, 5]:

$$V_{2\gamma}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, M) = T_{2\gamma}(\mathbf{p}, p^0=0, \mathbf{q}, q^0=0, M)|_{\varepsilon_{1,2}\to E_{1,2}} - V_I(\mathbf{p}, \mathbf{q}, M),$$
$$V_I(\mathbf{p}, \mathbf{q}, M) = \int \frac{V_\gamma(\mathbf{p}, \mathbf{k}, M)\, V_\gamma(\mathbf{k}, \mathbf{q}, M)}{b^2/(2\mu_R) - \mathbf{k}^2/(2\mu_R)} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}. \qquad (14)$$

Особенность двухфотонных процессов в скалярной электродинамике заключается в том, что амплитуды рассеяния, изображенные на рисунке, имеют ультрафиолетовую логарифмическую расходимость. Так, диаграмме рисунка *а* соответствует содержащая логарифмически расходящийся интеграл амплитуда рассеяния [8, 14]:

$$T_a(p, q, M) = \frac{i(Z\alpha)^2}{4\pi^2} N_{1,2}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \times$$
$$\times \int \frac{[(2p_1-k)\cdot(2p_2+k)]\,[(p_1+q_1-k)\cdot(p_2+q_2+k)]\, d^4k}{k^2 (p_1-q_1-k)^2 [(p_1-k)^2-m_1^2]\,[(p_2+k)^2-m_2^2]}, \qquad (15)$$
$$N_{1,2}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = [\varepsilon_1(\mathbf{p})\,\varepsilon_1(\mathbf{q})\,\varepsilon_2(\mathbf{p})\,\varepsilon_2(\mathbf{q})]^{-1/2}.$$

Для устранения расходимостей в исходной лагранжиан взаимодействия необходимо ввести контактные члены вида $\lambda(\varphi_1^*\varphi_1+\varphi_2^*\varphi_2)^2$ с бесконечной постоянной λ, которая является третьей константой перенормировки в данной теории. Конечная часть амплитуды $T_{2\gamma}$ имеет следующую структуру [8]:

$$T_{2\gamma} = R + Q, \qquad (16)$$

где R содержит члены вида $\ln|t|$, $|t|^{-1/2}$, сингулярные при $t = -(\mathbf{p}-\mathbf{q})^2 = 0$ с учетом условия (7); величина Q конечна при $(\mathbf{p}-\mathbf{q})^2=0$ и определена с точностью до константы. Выберем для Q

следующее условие нормировки на массовой поверхности [8]:

$$Q(p, q, M)=0, \quad \text{при } p^0=q=0, \quad \mathbf{p}^2=\mathbf{q}^2=b^2=0, \tag{17}$$

которое исключает возможность сдвига S-уровня в спектре (12) с точностью до членов порядка α^4. Наша задача состоит в выделении из $T_{2\gamma}$ величины R, которая после усреднения квазипотенциала (14) приводит к поправкам $O(\alpha^4)$ в энергии связи.

Рассмотрим амплитуду $T_a(p, q, M)$. Вычисление четырехмерных интегралов в (15) показывает, что необходимый вклад в квазипотенциал получится, если в числителе подынтегрального выражения (15) оставить линейные по k^0 члены, а четырехмерные импульсы p_1, q_1, p_2, q_2 заменить с учетом (7) и точности вычислений массами m_1, m_2. В результате для оператора взаимодействия, связанного с $T_a(p, q, M)$, получим выражение

$$V_a(\mathbf{p}, \mathbf{q}, M)=\frac{4i(Z\alpha)^2(m_1-m_2)}{\pi^2}\int\frac{k^0d^4k}{k^2(p_1-q_1-k)^2(k^2-2kp_1)(k^2+2kp_2)}\Bigg|_{p^0=q^0=0}+$$

$$+\frac{4i(Z\alpha)^2m_1m_2}{\pi^2}\int\frac{d^4k}{k^2(p_1-q_1-k)^2[(k-p_1)^2-m_1^2][(k+p_2)^2-m_2^2]}\Bigg|_{p^0=q^0=0}+$$

$$+O\left(\frac{1}{m_{1,2}}\right)=-\frac{(Z\alpha)^2(m_1-m_2)\pi^2}{m_1m_2(m_1+m_2)|\mathbf{p}-\mathbf{q}|}+$$

$$+\frac{4\pi\mu(Z\alpha)^2}{b(M)|\mathbf{p}-\mathbf{q}|^2}\ln\frac{\varkappa}{2(\mathbf{p}-\mathbf{q})^2}+O\left(\frac{1}{m_{1,2}}\right), \tag{18}$$

$$\varkappa=\mathbf{p}^2-b^2.$$

Аналогичный вклад перекрестной двухфотонной диаграммы в квазипотенциал имеет вид

$$V_b(\mathbf{p}, \mathbf{q}, M)=\frac{(m_1+m_2)(Z\alpha)^2\pi^2}{m_1m_2|\mathbf{p}-\mathbf{q}|}+O\left(\frac{1}{m_{1,2}}\right). \tag{19}$$

Квадратичное по фотонному полю A_μ взаимодействие мезонов (рисунок, c) приводит с необходимой точностью к квазипотенциалу

$$V_c(\mathbf{p}, \mathbf{q}, M)=\frac{-8m_1^2i(Z\alpha)^2}{4\pi^2E_1E_2}\int\frac{d^4k}{k^2(p_2+k-q_2)^2(k^2-2kp_1)}\Bigg|_{p^0=q^0=0}=$$

$$=-\frac{(Z\alpha)^2\pi^2}{m_2|\mathbf{p}-\mathbf{q}|}+O\left(\frac{1}{m_{1,2}}\right). \tag{20}$$

Перестановка частиц 1 и 2 показывает, что в рамках рассматриваемого приближения диаграмме рисунка d соответствует оператор взаимодействия

$$V_d(\mathbf{p}, \mathbf{q}, M)=-\frac{(Z\alpha)^2\pi^2}{m_1|\mathbf{p}-\mathbf{q}|}+O\left(\frac{1}{m_{1,2}}\right). \tag{21}$$

Последняя диаграмма e рисунка не дает необходимых поправок порядка α^4 в энергии связи. Второй, итерационный член квазипотенциала (14) с нужной точностью имеет вид

$$V_I(\mathbf{p}, \mathbf{q}, M)=\frac{4\mu(Z\alpha)^2}{\pi}\int\frac{d\mathbf{k}}{(\mathbf{k}-\mathbf{p})^2(\mathbf{k}-\mathbf{q})^2(b^2-\mathbf{k}^2)}=$$

$$=\frac{4\pi(Z\alpha)^2}{b(M)(\mathbf{p}-\mathbf{q})^2}\ln\frac{\varkappa}{2(\mathbf{p}-\mathbf{q})^2}, \quad \varkappa=\mathbf{p}^2-b^2. \tag{22}$$

Суммируя выражения (18)—(22) в определении (14), получим двухфотонный квазипотенциал

$$V_{2\gamma}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, M) = \frac{4(Z\alpha)^2 \mu\pi^2}{m_1 m_2 |\mathbf{p}-\mathbf{q}|} - \frac{(Z\alpha)^2 \pi^2}{\mu |\mathbf{p}-\mathbf{q}|} + O\left(\frac{1}{m_{1,2}}\right). \qquad (23)$$

Соответствующий оператор взаимодействия в конфигурационном пространстве определяется выражением [13]

$$V_{2\gamma}(r) = \frac{2(Z\alpha)^2 \mu}{m_1 m_2 r^2} - \frac{(Z\alpha)^2}{2\mu r^2} + O\left(\frac{1}{m_{1,2}}\right). \qquad (24)$$

4. Энергетический спектр. Для вычисления релятивистского спектра двухмезонного связанного состояния с точностью α^4 представим оператор взаимодействия мезонов с учетом (13), (24) следующим образом:

$$V(r) = V_\gamma(r) + V_{2\gamma}(r) = V^C(r) + \Delta V(r), \qquad (25)$$

$$V^C(r) = -\frac{Z\alpha}{r}\left(1 + \frac{b^2}{E_1 E_2}\right), \qquad (26)$$

$$\Delta V(r) = -\frac{(Z\alpha)^2}{2\mu r^3} - \frac{(Z\alpha)}{m_1 m_2}\frac{(\mathbf{r}\cdot\nabla)}{r^3} - \frac{\pi Z\alpha}{m_1 m_2}\delta(\mathbf{r}). \qquad (27)$$

Энергетические поправки к релятивистской формуле Бальмера, обусловленные взаимодействием $\Delta V(r)$, определяются в первом порядке теории возмущений формулой

$$\Delta B_{nl} = \langle \Psi_{nl} | \Delta V(r) | \Psi_{nl} \rangle. \qquad (28)$$

В качестве базисных волновых функций $\Psi_{nl}(r)$, удовлетворяющих уравнению (4) с потенциалом (26), выберем собственные функции оператора L^2 (L — оператор орбитального момента) с собственными значениями $l(l+1)$. Усредняя $\Delta V(r)$ по функциям $\Psi_{nl}(r)$ с помощью известных соотношений [12], получим выражение релятивистского спектра энергии двухчастичной связанной системы в скалярной электродинамике:

$$B_{nl} = -\frac{\mu(Z\alpha)^2}{2n^2} + \frac{\mu(Z\alpha)^4}{8n^4}\left(3 - \frac{\mu^2}{m_1 m_2}\right) - \frac{\mu(Z\alpha)^4}{n^3(2l+1)} + \frac{\mu^3(Z\alpha)^4}{m_1 m_2 n^3}\delta_{l0} + O(\alpha^5). \qquad (29)$$

Структура уровней энергии, определяемая выражением (29), совпадает с результатом, полученным другим способом в работе [6], а также при вычислениях, основанных на уравнении Брейта.

5. Заключение. Таким образом, проведенные вычисления релятивистского спектра энергии связанного состояния двух мезонов в скалярной электродинамике подтверждают возможность описания двухчастичных составных систем в квантовой теории поля на основе локального квазипотенциального уравнения (4) и предложенного способа построения оператора взаимодействия. Универсальность данного подхода, основанного на квазипотенциальном уравнении Логунова—Тавхелидзе, состоит в том, что он применим при изучении релятивистских связанных систем двух частиц произвольных масс и спинов с любыми видами взаимодействий между составляющими частицами [7].

В заключение авторы выражают благодарность академикам А. А. Логунову, А. Н. Тавхелидзе, И. Т. Тодорову и профессору В. Г. Кадышевскому за обсуждение результатов и ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Logunov A. A., Tavkhelidze A. N. Nuovo Cim., 1963, 29, N 2, p. 380. [2] Todorov I. T. Phys. Rev., 1971, D 3, p. 2351. [3] Caswell W., Lepage G. P. Phys. Rev., 1978, A18, p. 810. [4] Bodwin G. T., Yennie D. R. Phys. Reports, 1978, 43 C, N 6, p. 268. [5] Фаустов Р. Н. ЭЧАЯ, 1972, 3, с. 238. [6] Ризов В. А., Тодоров И. Т. ЭЧАЯ, 1975, 6, с. 669. [7] Мартыненко А. П., Фаустов Р. Н. ТМФ, 1985, 64, с. 179. [8] Rohrlich F. Phys. Rev., 1950, 80, p. 666. [9] Бьеркен Дж. Д., Дрелл С. Д. Релятивистская квантовая теория. Т. 1. М.: Наука, 1978. [10] Неменов Л. Л. Препринт № Р1-385. Дубна, ОИЯИ, 1984. [11] Берестецкий В. Ф., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1980. [12] Бете Г., Солпитер Э. Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами. М.: Физматгиз, 1960. [13] Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1958. [14] Ициксон К., Зюбер Ж.-Б. Квантовая теория поля. Т. 1—2. М.: Мир, 1984.

Поступила в редакцию
15.03.85

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1986, Т. 27, № 3

УДК 537.84

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ БЫСТРОГО РОСТА ВТОРОГО МОМЕНТА МАГНИТНОГО ПОЛЯ В ЗЕРКАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОМ ТЕЧЕНИИ

О. В. Артамонова, Д. Д. Соколов

(кафедра математики)

Введение. Процесс самовозбуждения второго момента, и в частности средней энергии магнитного поля, случайным короткокоррелированным статистически однородным, изотропным и зеркально-симметричным течением проводящей жидкости описывается уравнением Казанцева [1]. Растущие во времени решения этого уравнения изучались как методами качественной теории дифференциальных уравнений [1, 2], так и численно [3], однако особенно интересный в приложениях случай очень больших магнитных чисел Рейнольдса R_m до сих пор оставался недостаточно исследованным. Интерес к этому предельному случаю связан с тем, что в астрофизике магнитные числа Рейнольдса очень велики (порядка 10^3—10^{21} для различных объектов [4]), а уравнение Казанцева относится к тому классу уравнений, описывающих самовозбуждение магнитного поля, для которого скорость роста оказывается положительной и не стремится к нулю в пределе больших магнитных чисел Рейнольдса. Такой процесс самовозбуждения называется быстрым динамо [4] и, по современным представлениям, является основным механизмом генерации магнитных полей в астрофизике. Хотя в большинстве астрофизических объектов быстрое динамо связано с нарушением зеркальной симметрии течения (α-эффект Штеенбека—Краузе — Рэдлера [5]), исследование быстрого динамо в отсутствие этого эффекта также интересно.

В настоящей работе мы найдем скорость роста второго момента магнитного поля в пределе $R_m \to \infty$, а также поправки к этой скорости при больших, но конечных R_m. Кроме того, мы оценим асимптотическими методами порог возбуждения второго момента магнитного поля и получим предельное строение корреляционной функции. Для получения этих характеристик мы построим асимптотическое решение уравнения Казанцева в пределе $R_m \to \infty$. Метод построения этого решения отталкивается от идей квазиклассического приближения, которое, од-