ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1986, Т. 27, № 3

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 530.145.1

КАЛИБРОВОЧНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СИНГУЛЯРНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ МОНОПОЛЯ ДИРАКА

И. П. Волобуев

(НИИЯФ)

При квантовомеханическом описании движения заряженных частиц в поле монополя Дирака возникает формальное противоречие между сферической симметрией поля монополя и несимметричностью его вектор-потенциала. Чтобы разрешить это противоречие и восстановить сферическую симметричность теории, необходимо допустить, что при пространственных вращениях преобразованный вектор-потенциал связан с исходным калибровочным преобразованием [1, 2].

Таким образом, возникает задача нахождения этих преобразований. В работе [2] для таких преобразований найдено представление в виде контурных интегралов, позволяющее вычислить их в явном виде только в простейших частных случаях. В настоящей заметке показано, что геометрическое описание монополя Дирака позволяет найти эти преобразования в явном виде в общем случае.

Геометрический подход, использующий понятие связности в расслоенном пространстве, позволяет наиболее последовательно учесть симметрию задачи о движении частиц в поле монополя относительно вращений [3—5]. В этом подходе монополь Дирака минимального заряда $g=1/(2e)$ описывается канонической левоинвариантной связностью в расслоении Хопфа $S^3\to S^2$ [3, 6]; соответствующую форму связности на S^3 обозначим ω. Сферу S^3 отождествим с группой $SU(2)$, канонически представленной 2×2-матрицами, а сферу S^2 реализуем как множество точек в R^3, $S^2=\{\xi\in R^3, \xi^2=1\}$. Каноническую проекцию $\pi: S^3\to S^2$ зададим формулой $u\sigma_3 u^+=\sigma\xi$, $\xi=\pi(u)$; здесь матрица $u\in SU(2)$, а $\sigma=(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ — матрицы Паули. При таком определении проекции вертикальному автоморфизму Ψ_ρ расслоения $S^3\to S^2$ (или, на обычном языке, калибровочному преобразованию с функцией $\rho=\rho(\xi)$) соответствует правое умножение на $\exp(ie\sigma_3\rho)$, $\Psi_\rho: u\mapsto u\exp(ie\sigma_3\rho)$.

Обозначим через S_{n} сечение расслоения над $S^2\setminus\mathrm{n}$, $S_{\mathrm{n}}: S^2\setminus\mathrm{n}\to S^3$, которое задается формулой

$$S_{\mathrm{n}}(\xi)\equiv u(\mathrm{n},\xi)=\frac{1}{2\sqrt{(1-\mathrm{n}\xi)(1-n_3)}}\{1+\xi_3-n_3-\mathrm{n}\xi+$$
$$+i(\sigma[\mathrm{n},\xi])+i(\sigma[\mathrm{e}_3,\mathrm{n}-\xi])\},\quad \mathrm{e}_3=(0,0,1). \qquad (1)$$

Можно проверить, что обратный образ формы ω относительно этого сечения есть вектор-потенциал, сингулярный на линии n:

$$S_{\mathrm{n}}^*\omega=A_{\mathrm{n}}=g(1-n_r)^{-1}(-n_\varphi d\theta+n_\theta\sin\theta d\varphi).$$

Обозначим через L_g левое действие группы $SU(2)$ на себя: для $g, u\in SU(2)$ $L_g u=gu$. Проекцию этого действия на базу S^2 будем обозначать $O_g: \pi\circ L_g=O_g\circ\pi$.

Подействовав преобразованием L_g на сечение S_{n}, получим отображение $L_g\circ S_{\mathrm{n}}: S^2\to S^3$, проекция которого обратно на базу S^2 дает преобразование $O_g: \pi\circ L_g\circ S_{\mathrm{n}}=O_g$. Поэтому отображение $L_g\circ S_{\mathrm{n}}\circ O_g^{-1}: S^2\to S^3$ есть сечение над $S^2\setminus O_g\mathrm{n}$. Следовательно, во всех точках S^2, за исключением n и $O_g\mathrm{n}$, имеет место соотношение

$$\Psi_\rho\circ S_{\mathrm{n}}=L_g\circ S_{\mathrm{n}}\circ O_g^{-1}, \qquad (2)$$

где Ψ_ρ — некоторый вертикальный автоморфизм. Взяв с помощью обеих частей этого равенства обратный образ формы ω и учтя ее левоинвариантность ($L_g^*\omega=\omega$), получим $A_{O_g\mathrm{n}}=A_{\mathrm{n}}+d\rho$. Таким образом, функция $\rho=\rho(\xi)$, параметризующая вертикальный автоморфизм Ψ_ρ в (2), есть калибровочное преобразование, связывающее вектор-потенциалы с линиями сингулярностей $\mathbf{n}$ и $O_g\mathbf{n}$.

Применим равенство (2) к некоторому вектору $\xi \in S^2$, перейдем к матричному представлению $S_\mathbf{n}(\xi)$ (1) и перенесем $u(\mathbf{n}, \xi)$ направо. Тогда получим

$$e^{ie\sigma_3\rho} = u^{-1}(\mathbf{n}, \xi)\, g u(\mathbf{n}, O_g^{-1}\xi). \qquad (3)$$

Возьмем в качестве g матрицу

$$g = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{1+\mathbf{n}\mathbf{n}'} - \frac{i(\sigma[\mathbf{n}, \mathbf{n}'])}{\sqrt{1+\mathbf{n}\mathbf{n}'}}\right).$$

В этом случае $O_g\mathbf{n}=\mathbf{n}'$, $O_g^{-1}\xi$ выражается через $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}'$ формулой

$$O_g^{-1}\xi = (\mathbf{n}\mathbf{n}')\xi + [\xi[\mathbf{n}, \mathbf{n}']] + \frac{[\mathbf{n}, \mathbf{n}'](\xi[\mathbf{n}, \mathbf{n}'])}{1+\mathbf{n}\mathbf{n}'}.$$

Подставляя в (3) явный вид $u(\mathbf{n}, \xi)$ из (1), а также выражения для g и $O_g^{-1}\xi$, получим замкнутое алгебраическое выражение для $\rho(\mathbf{n}, \mathbf{n}')$. Довольно длинные вычисления приводят к простому результату:

$$\rho(\mathbf{n}, \mathbf{n}') = -2g \arcsin \frac{(\xi[\mathbf{n}, \mathbf{n}'])}{\sqrt{2(1-\mathbf{n}\xi)(1-\mathbf{n}'\xi)(1+\mathbf{n}\mathbf{n}')}}.$$

Подставляя сюда $\xi=\mathbf{x}/|\mathbf{x}|$, $g=1/(2e)$, получим выражение для калибровочного преобразования, связывающего вектор-потенциалы с линиями сингулярностей $\mathbf{x}=\lambda\mathbf{n}$ и $\mathbf{x}=\lambda\mathbf{n}'$, $\lambda>0$, во всем пространстве, справедливые для монополя любого заряда. Эти преобразования необходимы, например, для сравнения волновых функций частиц в поле монополя, вычисленных с вектор-потенциалами, имеющими различные линии сингулярностей. Отметим еще, что рассмотренная задача дает интересный пример применения теории расслоенных пространств для конкретных расчетов в квантовой теории.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Монополь Дирака. М.: Мир, 1970. [2] Frenkel A., Hrasko P. Ann. Phys., 1977, **105**, p. 288. [3] Trautman A. Intern. J. of Theor. Phys., 1977, **16**, p. 561. [4] Horváthy P. Ibid., 1981, **20**, p. 697. [5] Соловьев М. А. Письма в ЖЭТФ, 1984, **39**, с. 582. [6] Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т. 1. М.: Наука, 1981.

Поступила в редакцию
22.04.85

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1986, Т. 27, № 3

УДК 530.12

СУПЕРСИММЕТРИЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

Г. А. Сарданашвили, О. А. Захаров

(кафедра теоретической физики)

Три обстоятельства выдвинули теорию суперсимметрий на первый план современной программы объединения фундаментальных взаимодействий, включая гравитацию. Во-первых, классические фермионные поля, согласно принципу Паули, образуют алгебру Грассмана. Во-вторых, расходимости в фейнмановских диаграммах имеют для фермионов и бозонов разные знаки и могут скомпенсировать друг друга, если между фермионами и бозонами, участвующими в процессе, есть определенная симметрия (суперсимметрия) [1]. В-третьих, в моделях расширенной супергравитации гравитон оказывается с необходимостью включенным в один мультиплет с частицами, имеющими внутренние индексы, что рассматривается как предпосылка объединения теорий гравитации и элементарных частиц в рамках теории суперсимметрий. В то же время ни один предсказываемый этой теорией суперпартнер кварков, лептонов, фотона, гравитона пока не обнаружен [2]. В этой связи мы хотим указать ряд трудностей, с которыми сталкивается корректное применение математического аппарата