

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Logunov A. A., Tavkhelidze A. N. *Nuovo Cim.*, 1963, 29, N 2, p. 380. [2] Todorov I. T. *Phys. Rev.*, 1971, D 3, p. 2351. [3] Caswell W., Lepage G. P. *Phys. Rev.*, 1978, A18, p. 810. [4] Bodwin G. T., Yennie D. R. *Phys. Reports*, 1978, 43 C, N 6, p. 268. [5] Фаустов Р. Н. ЭЧАЯ, 1972, 3, с. 238. [6] Ризов В. А., Тодоров И. Т. ЭЧАЯ, 1975, 6, с. 669. [7] Мартыненко А. П., Фаустов Р. Н. ТМФ, 1985, 64, с. 179. [8] Rohrlich F. *Phys. Rev.*, 1950, 80, p. 666. [9] Бьеркен Дж. Д., Дрелл С. Д. Релятивистская квантовая теория. Т. 1. М.: Наука, 1978. [10] Неменов Л. Л. Препринт № P1-385. Дубна, ОИЯИ, 1984. [11] Берестецкий В. Ф., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1980. [12] Бете Г., Солпитер Э. Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами. М.: Физматгиз, 1960. [13] Гельфанд И. М., Шиллов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1958. [14] Ициксон К., Зюбер Ж.-Б. Квантовая теория поля. Т. 1—2. М.: Мир, 1984.

Поступила в редакцию
15.03.85

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1986, Т. 27, № 3

УДК 537.84

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ БЫСТРОГО РОСТА ВТОРОГО МОМЕНТА МАГНИТНОГО ПОЛЯ В ЗЕРКАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОМ ТЕЧЕНИИ

О. В. Артамонова, Д. Д. Соколов

(кафедра математики)

Введение. Процесс самовозбуждения второго момента, и в частности средней энергии магнитного поля, случайным короткокоррелированным статистически однородным, изотропным и зеркально-симметричным течением проводящей жидкости описывается уравнением Казанцева [1]. Растущие во времени решения этого уравнения изучались как методами качественной теории дифференциальных уравнений [1, 2], так и численно [3], однако особенно интересный в приложениях случай очень больших магнитных чисел Рейнольдса R_m до сих пор оставался недостаточно исследованным. Интерес к этому предельному случаю связан с тем, что в астрофизике магнитные числа Рейнольдса очень велики (порядка 10^3 — 10^{21} для различных объектов [4]), а уравнение Казанцева относится к тому классу уравнений, описывающих самовозбуждение магнитного поля, для которого скорость роста оказывается положительной и не стремится к нулю в пределе больших магнитных чисел Рейнольдса. Такой процесс самовозбуждения называется быстрым динамо [4] и, по современным представлениям, является основным механизмом генерации магнитных полей в астрофизике. Хотя в большинстве астрофизических объектов быстрое динамо связано с нарушением зеркальной симметрии течения (α -эффект Штеенбека—Краузе—Рэдлера [5]), исследование быстрого динамо в отсутствие этого эффекта также интересно.

В настоящей работе мы найдем скорость роста второго момента магнитного поля в пределе $R_m \rightarrow \infty$, а также поправки к этой скорости при больших, но конечных R_m . Кроме того, мы оценим асимптотическими методами порог возбуждения второго момента магнитного поля и получим предельное строение корреляционной функции. Для получения этих характеристик мы построим асимптотическое решение уравнения Казанцева в пределе $R_m \rightarrow \infty$. Метод построения этого решения отталкивается от идей квазиклассического приближения, которое, од-

нако, в данном случае, строго говоря, неприменимо. Поэтому нам придется некоторым образом модифицировать метод ВКБ применительно к конкретному виду данного уравнения. Однако главное наблюдение, связанное с идеей квазиклассического приближения, отмеченное в [2], сохраняется: квазиклассический интеграл растет с ростом R_m , но очень медленно ($\sim \ln R_m$). Соответственно мы имеем дело с очень медленными, логарифмическими асимптотиками. Тем не менее оказывается, что уже первый член асимптотики вполне удовлетворительно аппроксимирует результаты численных расчетов [3] на всем их протяжении от порога возбуждения (R_m порядка десятков) до $R_m \sim 10^7$. В рамках настоящей работы мы не будем обсуждать реалистичность уравнения Казанцева и его связь с другими приближениями, описывающими рост второго момента поля (см. об этом, например, в обзоре [6], где приведена библиография по этому вопросу).

1. Уравнение Казанцева. Уравнение генерации второго момента принимает особенно простой вид, если его записать относительно вспомогательной функции $\Psi(r, t)$, которая следующим образом связана с продольной корреляцией магнитного поля $W(r, t)$:

$$\Psi(r, t) = \frac{r^2}{3\sqrt{2m(r)}} W(r, t),$$

где r — расстояние между точками, в которых вычисляется коррелятор магнитного поля, а $m(r)$ — функция, определяемая соотношением

$$\frac{1}{2m(r)} = \frac{1}{R_m} + \frac{1-F(r)}{3}.$$

Здесь $F(r)$ — продольная корреляция поля скорости, $R_m = Lv/v_m$ — магнитное число Рейнольдса, L — характерный размер поля скорости, v — характерная скорость, v_m — коэффициент магнитной диффузии. Далее все величины измеряются в единицах, обезразмеренных соответствующими комбинациями параметров L, v, v_m . Итак, уравнение Казанцева для функции $\Psi(r, t)$ имеет вид

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{1}{2m(r)} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} - U(r) \Psi, \quad (1)$$

где потенциал U равен

$$U = \frac{1}{2r} \frac{df}{dr} + \frac{1}{mr^2} - \frac{1}{8m^3} \left(\frac{dm}{dr} \right)^2,$$

причем

$$f(r) = \frac{1}{3r^2} \frac{d}{dr} (r^3 F(r)); \langle v_i(\mathbf{x}, t) v_i(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t') \rangle = 2Lv \delta(t-t') f(r),$$

скобки означают осреднение по полю скорости. Качественный вид эффективной массы $m(r)$ и потенциала $U(r)$ см. на рис. 1.

При решении задачи о самовозбуждении естественно искать решения вида $e^{2\gamma t} \Psi(r)$, причем оказывается [1, 3], что функция $\Psi(r)$ удовлетворяет условиям $\Psi \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$, $\Psi \sim r^2$ при $r \rightarrow 0$. В итоге получается задача на собственные функции Ψ и собственные значения γ .

Мы будем строить асимптотическое решение в том случае, когда функция $f(r)$, определяющая корреляционные свойства поля скорости, не содержит параметров типа гидродинамического числа Рейнольдса, поскольку приближения, которые делаются при выводе этого уравнения, не позволяют учитывать связанных с этим эффектов, и именно

такие функции дают, как считается, наиболее реалистические результаты [6]. Другими словами, для нашего рассмотрения годятся функции f вида $f(r) \sim e^{-r^2}$, конкретно же для нас важны условия нормировки $f(0)=1$, $f''(0)=-2$, и условия $f'''(0)=0$ и $f^{(IV)}(0)=2\sigma$. Для функции $f(r)=e^{-r^2}$ параметр $\sigma=1$.

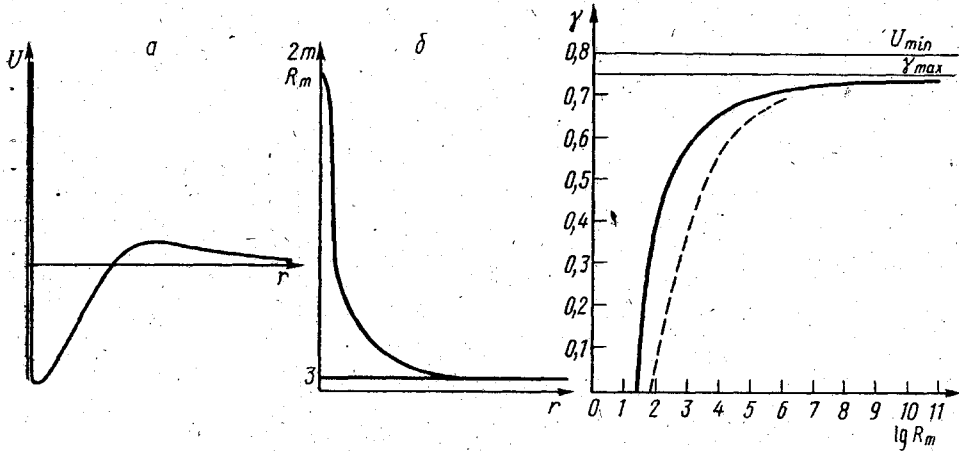


Рис. 1. Качественный вид потенциала (а) и эффективной массы (б) для уравнения Казанцева

Рис. 2. Сравнение скорости роста второго момента, полученной по асимптотической формуле (сплошная линия) и численно (пунктир)

Поскольку мы получим решение, сконцентрированное в пределе $R_m \rightarrow \infty$ при малых r , функции $\frac{1}{2m(r)}$ и $U(r)$ можно заменить с достаточной точностью вблизи точки $r=0$ следующими выражениями:

$$f(r) = 1 - r^2 + \sigma \frac{r^4}{2},$$

$$\frac{1}{2m(r)} = \varepsilon + \frac{r^2}{5} - \sigma \frac{r^4}{14},$$

$$U(r) = -\frac{3}{5} + \frac{1/25 + \sigma \cdot 2\varepsilon/7}{\sigma^2/14 - 1/5 - \varepsilon/r^2} + \sigma \frac{8r^2}{7} + \frac{2\varepsilon}{r^2}, \quad (2)$$

где $\varepsilon=1/R_m$. Минимальное значение $U(r)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ равно $-4/5$, поэтому максимальное значение скорости роста $\gamma(\varepsilon)$ не может превышать $4/5$ (в единицах v/L). Как показывает численное исследование [3], реально оно несколько меньше.

2. Построение асимптотического решения. Исходное наблюдение при построении асимптотического решения появляется при рассмотрении точки минимума потенциала (2). Если $\sigma > 0$, то эта точка находится при

$$r_{\min} = \sqrt[4]{\frac{14}{5\sigma}} \sqrt[4]{\varepsilon} \sim \sqrt[4]{\varepsilon}.$$

Поскольку мы ожидаем, что функция $\Psi(r)$ сосредоточена вблизи минимума потенциала, то естественно ввести новую, «растянутую» пере-

менную $\xi = r/\sqrt[4]{\varepsilon}$ так, чтобы потенциал U относительно этой переменной оказался медленно меняющимся. Если $\sigma = 0$ или отрицательно, то минимум потенциала лежит при еще больших r , но дальнейшие рассмотрения все равно сохраняются. Отметим, что появление масштаба $\sim \sqrt[4]{\varepsilon}$ в данной задаче достаточно неожиданно, ранее предполагалось, что возникают масштабы лишь ~ 1 и $\sim \sqrt{\varepsilon}$.

В результате этой замены оказывается, что

$$U(\xi) = -4/5 + \sqrt{\varepsilon} u(\xi),$$

где

$$u(\xi) = \frac{3}{\xi^2} + \frac{15\sigma}{14} \xi^2.$$

Видно, что в окрестности точки минимума потенциала, где, как представляется, и сосредоточена функция $\Psi(r)$, потенциал $U(\xi)$ почти постоянен. Его переменность сказывается либо при очень малых r ($\xi \sim \sqrt[4]{\varepsilon}$, $r \sim \sqrt{\varepsilon}$), либо при сравнимых с единицей r ($\xi \sim 1/\sqrt[4]{\varepsilon}$, $r \sim 1$).

Будем строить асимптотическое решение следующим образом. Разобьем область изменения r на три части: $0 \leq r < a\sqrt{\varepsilon}$, $a\sqrt{\varepsilon} \leq r \leq b$, $r > b$, где a и b — некоторые константы порядка единицы, вопрос о выборе которых мы рассмотрим ниже. В первой и третьей из этих областей уравнение (1) легко исследуется. В первой области нужно сделать обычную скин-слоиную замену $\zeta = r/\sqrt{\varepsilon}$, после чего легко получается, что $U(\zeta) = 2/\zeta^2$, $\Psi(r) = B(r/\sqrt{\varepsilon})^2$. В третьей области функция Ψ экспоненциально убывает: $\Psi(r) = Ce^{-3r/2}$, $r \gg 1$.

Во второй области мы произведем замену $\xi = r/\sqrt[4]{\varepsilon}$ и, отбросив малую переменную часть потенциала, легко получим следующее просто интегрирующееся уравнение для Ψ :

$$\xi^2 \Psi'' + \lambda \Psi = 0, \quad (3)$$

где $\lambda = 5(4/5 - \gamma)$.

Теперь нам надо произвести сшивку трех полученных решений в точках $r_1 = a\sqrt{\varepsilon}$ и $r_2 = b$. Сшивать необходимо, как обычно, сами значения функции Ψ и ее производные. Важно заметить, что структура решений уравнения (3) такова, что производные в точках r_1 и r_2 в $\ln \varepsilon$ меньше значений функций. Поэтому сшивка значений функций и их производных должна производиться не в одном и том же, а в двух последовательных порядках асимптотического разложения. В первом приближении мы будем рассматривать функцию $\Psi^{(1)}(r)$ — решение уравнения (3) с нулевыми граничными условиями в точках r_1 и r_2 , которая дополняется нулями в первой и третьей областях. На втором шаге асимптотического разложения компенсируется несовпадение производных функции на границе разных областей, для чего используются поправка $\Psi^{(2)}(r)$ во второй области и старшие члены разложения в первой и третьей областях, а также обеспечивается сшивка значений функции во втором приближении. В итоге асимптотическое собственное значение находится по первому приближению, а собственная функция, хорошо описывающая все три области, находится лишь во втором приближении. Такая ситуация обычна и для стандартного квазиклассического приближения в матричном случае [7].

До сих пор мы не определили констант a и b . Однако оказывается, что в первое приближение они не входят (член $\ln b/a$ не конкурирует с $\ln \varepsilon$), так что без ограничения общности можно положить $a = b = 1$.

Итак, после несложных вычислений получаем в первом приближении

$$\gamma_k = \frac{3}{4} - \frac{1}{5} \left(\frac{2\pi k}{\ln \varepsilon} \right)^2,$$

$$\Psi_k = A_k \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{\varepsilon}} \sin \left(\frac{2\pi k}{\ln \varepsilon} \ln r \right), \quad (4)$$

где $k=1, 2, 3, \dots$ — номер собственной функции. Интерес представляет $k=1$.

Выражение (4) для собственной функции Ψ справедливо только во второй области, в других же его нужно дополнить нулями. Мы не будем заниматься получением выражения для функции Ψ во втором приближении, которое необходимо для последовательного вычисления формы корреляционной функции, поскольку само Ψ не представляет для нас особого интереса. Вместо этого мы грубо оценим функцию

$$\psi(r) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r \sqrt{2m} \Psi(r)) = \langle H_i(\mathbf{x}) H_i(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle, \quad (5)$$

воспользовавшись тем обстоятельством, что если (4) подставить в (5), то в точках r_1 и r_2 можно произвести сшивку с решением, отвечающим первой и третьей областям. В результате получим

$$\omega_k(r) = \begin{cases} 1, & 0 \leq r < \sqrt{\varepsilon}, \\ (-1)^k \frac{\varepsilon^{5/4}}{r^{5/2}} \left[\frac{\ln \varepsilon}{4\pi k} \sin \left(\frac{2\pi k}{\ln \varepsilon} \ln r \right) + \cos \left(\frac{2\pi k}{\ln \varepsilon} \ln r \right) \right], & \sqrt{\varepsilon} \leq r \leq 1, \\ (-1)^k \varepsilon^{5/4} e^{-\frac{3}{2}(r-1)} \frac{3r-2}{r^2}, & r > 1. \end{cases} \quad (6)$$

Функция $\omega_k(r)$ нормирована на $\omega(0) = 1$.

3. Обсуждение. Из формулы (4) прежде всего видно, что рост второго момента (средней энергии) оказывается процессом быстрого динамо. При $R_m \rightarrow \infty$ скорость роста стремится к $3/4$ (в единицах v/L), что, однако, несколько меньше очевидной оценки $4/5$. Сравнение с численными результатами [8] представлено на рис. 2. Видно, что согласие вполне удовлетворительное, при $R_m = 10^6$ оно достигает 0,02, что очень хорошо для медленной логарифмической асимптотики. Из условия

$$\gamma(\varepsilon) = \frac{3}{4} - \frac{1}{5} \left(\frac{2\pi}{\ln \varepsilon} \right)^2 = 0$$

можно оценить порог возбуждения. Он оказывается равным

$$R_m = e^{4\pi/\sqrt{15}} \approx 26,$$

что вполне согласуется с результатами [8], где исследована зависимость порога возбуждения от формы коррелятора и показано, что он лежит в интервале $R_m = 20-100$ в зависимости от формы коррелятора.

Сравнение численной и асимптотической функции $\omega(r)$ приведено на рис. 3. Оно также вполне удовлетворительно. Представляет интерес

асимптотическое поведение минимального значения функции $\omega(r)$ (оно отрицательно) при $R_m \rightarrow \infty$. Положение минимума асимптотической функции $\omega(r)$ смещается с ростом R_m справа налево и при $R_m \rightarrow \infty$ ведет себя как

$$r_* = e^{-8/5} + \frac{3968}{375} e^{-8/5} \pi^2 \frac{1}{\ln^2 \varepsilon} \approx \\ \approx 0,2 + 21,1 \frac{1}{\ln^2 \varepsilon}.$$

$$\omega(r_*) = -\varepsilon^{5/4} \left(\frac{e^4}{5} - \pi^2 e^4 \frac{1408}{375} \frac{1}{\ln^2 \varepsilon} \right) \approx \\ \approx -\varepsilon^{5/4} \left(10,9 - 2023,3 \frac{1}{\ln^2 \varepsilon} \right),$$

что не противоречит численным результатам [3]. Интересно, что $\omega(r_*)$, получаемое по последней формуле, отрицательно только при $R_m \gtrsim 10^5$, что связано с медленным характером полученных асимптотик.

Авторы благодарны А. Г. Никитину, В. Г. Новикову, С. А. Молчанову, А. А. Рузмайкину за полезные обсуждения.

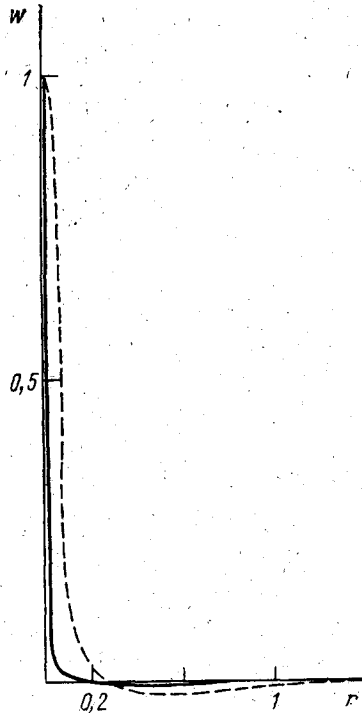


Рис. 3. Сравнение формы расходящейся корреляционной функции $\omega(r)$, полученной по асимптотической формуле (сплошная линия) и численно (пунктир) ($R_m = 10^4$)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Казанцев А. П. ЖЭТФ, 1967, 53, с. 1806. [2] Рузмайкин А. А., Соколов Д. Д. Письма в Астрон. журн., 1981, 7, с. 701. [3] Новиков В. Г., Рузмайкин А. А., Соколов Д. Д. ЖЭТФ, 1983, 85, с. 909. [4] Zeldovich Ya. V., Ruzmaikin A. A., Sokoloff D. D. Magnetic fields in astrophysics. Gordon and Breach Sci. Publ. Inc. 1983. [5] Краузе Ф., Рэдлер К.-Х. Электродинамика средних полей и теория динамо. М.: Мир, 1984. [6] Молчанов С. А., Рузмайкин А. А., Соколов Д. Д. УФН, 1985, 145, № 4, с. 128. [7] Маслов В. П., Федорюк М. В. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. М.: Наука, 1976. [8] Новиков В. Г., Рузмайкин А. А., Соколов Д. Д. Препринт ИПМ АН СССР № 138. М., 1982; Маслова Т. Б., Новиков В. Г., Рузмайкин А. А. Препринт ИПМ АН СССР № 130. М., 1985.

Поступила в редакцию
06.03.85