

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Пытьев Ю. П. Матем. сб., 1982, 118(160), с. 19. [2] Пытьев Ю. П. Там же, 1983, 120(162), с. 240. [3] Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.

Поступила в редакцию
18.03.85

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1986, Т. 27, № 4

УДК 517.958:519.6

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ СТРУКТУРНОЙ ДИАГНОСТИКИ

В. Б. Гласко, А. Ю. Губарь, Е. В. Федотова

(кафедра математики)

1. Среди неразрушающих способов диагностики внутренних структур различных изделий и живых тканей важное место отводится ультразвуковому зондированию [1]. В этом случае о внутренней структуре, характеризуемой распределением некоторого параметра $\beta(x)$ как функции координат, судят по акустическому импедансу среды $I(\omega)$, измеряемому в высокочастотном звуковом диапазоне. Такая задача относится к числу обратных, и для ее решения могут быть использованы регуляризующие по Тихонову алгоритмы [2].

Принципиальными для разработки регуляризующих алгоритмов являются следующие вопросы: а) является ли соответствие $I(\omega) \rightarrow \beta(x)$ однозначным в рамках модели, отвечающей условиям эксперимента; б) в какой мере можно при заданной точности последнего рассчитывать на получение детальной информации о структуре. Эти вопросы рассматриваются в настоящей статье для одномерной модели, соответствующей задаче акустической томографии [1]. Ответ на них оказывается возможным получить с помощью асимптотического ($\omega \rightarrow \infty$) анализа.

2. Введя безразмерные переменные, амплитуду звукового давления $u(x)$ при гармоническом возбуждении в одномерной среде можно описать следующими условиями:

$$u'' + \lambda^2 \beta(x) u = 0, \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 1, \quad (1)$$

где при равномерно малом поглощении $\beta(x) = \beta_1(x) + i\varepsilon$, $\varepsilon = \text{const} > 0$ [3], $\beta_1(x) > 0$, $\lambda^2 = \omega^2 l^2 \rho_0 \beta_0$, l — характерная длина системы, ρ_0 — масштаб плотности, ω — характерная частота зондирования, $\beta_0 = (a^2 \rho_0)^{-1}$, a — скорость звука в среде. В задачах рассматриваемого типа $\varepsilon \ll \beta_1(x)$ и безразмерный параметр $\lambda^2 \gg 1^*$.

Считая заданной величину ε , будем характеризовать структуру параметром $\beta_1(x)$, эквивалентным при заданной плотности «скоростному разрезу» [4]. При каждой функции $\beta_1(x)$ теоретическое значение импеданса, сопоставляемое с измерениями, дается формулой

$$I(\omega) = i\omega\rho_0 l \left/ \left(\frac{du}{dx} \right)_{x=1} \right. \quad (2)$$

Об однозначности соответствия $I(\omega) \rightarrow \beta_1(x)$ можно судить, сопоставив задаче (1) модель с кусочно-постоянной характеристикой $\beta_1(x)$ при произвольном числе слоев n . Подобная задача изучалась в

* Так, в задачах медицинской томографии $l \simeq 5-10$ см, $\rho_0 = 1$ г/см³, $\omega = 2\pi$ (1,3—1,7) · 10⁶ с⁻¹, $\beta_0 = 0,1 \cdot 10^{-10}$ см · с² · г⁻¹, $\varepsilon = 0,04$.

[4] для слоистой структуры, покоящейся на полупространстве и при чисто мнимой $\beta(x)$ (поглощающая среда). Оказывается, соответствующая методика анализа может быть распространена и на рассматриваемый случай.

Введем сетку $\{x_p\}$, $p=0, \dots, n+1$, полагая $x_0=0$, $x_{k+1}=x_k + d_{n-k}$ ($d_k > 0$), $x_{n+1}=1$. Пусть $\beta_1(x) = \beta_{n+1-p} = \text{const} > 0$ при $x \in (x_p, x_{p+1})$. Назовем классом K_n^1 множество структур, характеризующихся вектором $\beta_1 = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n+1}, d_1, \dots, d_n\}$ при любых заданных n и β_1 .

Теорема 1. В классе K_n^1 заданной функции $I(\omega)$ может отвечать лишь один вектор β_1 .

Для доказательства сопоставим физической характеристике структуры совокупность P «эффективных» параметров:

$$\tau_k = \sqrt{\rho_k/\rho_{k+1}}, \quad k=1, 2, \dots, n, \quad \theta_p = d_p \sqrt{\rho_p}, \quad p=1, 2, \dots, n+1, \quad (3)$$

где $\beta_p = \beta_p + i\varepsilon$. Очевидно, в классе K_n^1 заданной P соответствует единственный вектор β_1 . Заметим, что $\theta_p = \alpha_p + i\delta_p$, где $\delta_p > 0$.

Аналогично [4] можно убедиться в справедливости следующего аддитивного представления:

$$\kappa I(\omega) \equiv \tilde{I}(\lambda) = \sum_{p=0}^n S_p, \quad S_p = W_p \frac{\tau_p t_p}{1 + \gamma_p \tau_p t_p}, \quad (4)$$

где κ не зависит от параметров структуры, за исключением β_1 ; $W_0=1$, $\gamma_0=0$, $t_0=1$, и при $p \neq 0$

$$W_p = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{\tau (1-t_k^2)}{(1 + \gamma_k \tau_k t_k)^2}, \quad \gamma_{p+1} = \frac{\gamma_p \tau_p + t_p}{1 + \gamma_p \tau_p t_p}, \quad t_p = \frac{1 - e_{p+1}}{1 + e_{p+1}}, \quad e_p = \exp(2i\theta_p \lambda).$$

Здесь существенно, что $e_p = O(e^{-2\theta_p \lambda})$ при $\lambda \rightarrow +\infty$, $t_p = 1 - 2e_{p+1} + o(e_{p+1})$, $1 - t_p^2 = 4e_{p+1} + o(e_{p+1})$. Тогда из (4) следует, что при достаточно больших λ $\tilde{I}(\lambda) = 1 + [4\tau_1/(1 + \tau_1) - 2]e_1 + o(e_1)$, а потому τ_1 и θ_1 однозначно определяются заданным импедансом. Допустим, по индукции, что по $I(\omega)$ однозначно определены $\tau_1, \dots, \tau_k$, $\theta_1, \dots, \theta_k$, а следовательно, и функции $t_0, \dots, t_{k-1}$, $\gamma_0, \dots, \gamma_k$, $S_0, \dots, S_{k-1}$. Рассмотрим функцию $\tilde{I}_{(k)} \equiv \frac{1}{W_k} \left(\tilde{I}(\lambda) - \sum_{p=0}^{k-1} S_p \right)$. Из (4) следует, что при $\lambda \rightarrow$

$\rightarrow +\infty$ $\tilde{I}_{(k)} = \left(\frac{4\tau_{k+1}}{1 + \tau_{k+1}} - 2 \right) e_{k+1} + o(e_{k+1})$, и, следовательно, τ_{k+1} и θ_{k+1} определены однозначно. По индукции, по $I(\omega)$ однозначно определена совокупность P эффективных параметров и, стало быть, $\beta_1 \subset K_n^1$.

Заметим, что при небольшом изменении хода рассуждений устанавливается однозначность соответствия $\{I(\omega), \beta_1\} \rightarrow \{n, \beta_1\}$.

3. Доказанная теорема означает, что при достаточно высокой точности измерений и применении достаточно точных регуляризирующих алгоритмов можно рассчитывать на получение информации о деталях структуры. Вместе с тем использованное при ее доказательстве представление импеданса (4) не дает ответа на вопрос о том, какова эта информация при конечной погрешности эксперимента и при зондировании в конечном частотном диапазоне.

Для получения такого ответа естественно сопоставить задаче (1) модель с непрерывной характеристикой $\beta(x)$. Заметим, что в используемом диапазоне физических величин безразмерный параметр λ^2 является большим: $\lambda^2 \sim 10^3$. Это значит, что измеряемый при соответствующих частотах импеданс сопоставим с некоторым асимптотическим ($\omega \rightarrow \infty$) его представлением. Формула (4) может рассматриваться лишь как «аддитивно-асимптотическая» [5], и нужное представление мы получим, опираясь, в частности, на метод ВКБ [6].

Можно заметить, что определяющая $I(\omega)$ в (2) величина

$$\frac{du}{dx} \Big|_{x=1} = 1 - \lambda^2 \int_0^1 \frac{\partial G(x, s)}{\partial x} \Big|_{x=1} \beta(s) s ds, \quad (5)$$

где $G(x, s)$ — функция Грина для краевой задачи (1), и ее производная под интегралом может быть оценена с использованием асимптотических представлений фундаментальных решений уравнения (1), данных в [6].

Введем в рассмотрение следующие величины:

$$r(s) = \int_0^s \sqrt{\beta(t)} dt, \quad \alpha(s) = \frac{i}{8} \left(\frac{5}{4} \frac{\beta'^2(s)}{\beta^{5/2}(s)} - \frac{\beta''(s)}{\beta^{3/2}(s)} \right), \quad R(s) = \int_0^s \alpha(t) dt, \quad (6)$$

$$Q_1(s) = \operatorname{Im} \sqrt{\beta(s)}, \quad Q_2(s) = -\operatorname{Re} \sqrt{\beta(s)}; \quad R_k(s) = \int_0^s Q_k(t) dt, \quad k = 1, 2.$$

Тогда указанным выше путем приходим к следующему выражению:

$$\frac{dG}{dx} \Big|_{x=1} = \sqrt[4]{\frac{\beta(1)}{\beta(s)}} \frac{\exp\left(i\lambda \left(r(1) + \sum_{k=1}^2 R_k(s)\right)\right)}{\exp(2i\lambda r(1)) - 1} \left\{ \sum_{k=1}^2 g_k(s) + O(1/\lambda^2) \right\}, \quad (7)$$

где

$$g_k(s) \equiv 1 + \frac{1}{\lambda} \left(R(1) + (-1)^{k+1} R(s) - 2 \frac{R(1) \exp(2i\lambda r(1))}{\exp(2i\lambda r(1)) - 1} \right).$$

Заметим, что в этом выражении нельзя пренебречь экспоненциальными членами в знаменателе по сравнению с единицей, поскольку ε_2 на два порядка меньше $\beta_1(x)$.

Подставив (7) в (5), приходим к интегралам от быстро осциллирующих функций:

$$F_k \equiv \int_0^1 e^{i\lambda \rho(s)} f_k(s) ds,$$

где

$$f_k(s) = \frac{g_k(s) \beta(s) s}{\sqrt[4]{\beta(s)}}, \quad \rho(s) = \sum_{k=1}^2 R_k(s).$$

Асимптотическое представление для них, получаемое интегрированием по частям, с той же относительной точностью, что и в (7), имеет вид

$$F_k = \left(-\frac{i}{\lambda} \frac{f_k(s)}{\rho'(s)} + \frac{1}{\lambda^2} \frac{f_k'(s)}{\rho'^2(s)} \right) e^{i\lambda\rho(s)} \Big|_0^1 + O(1/\lambda^3). \quad (8)$$

Используя (8), можно получить из (2), (5) асимптотическое выражение для импеданса, что доказывает следующее утверждение.

Теорема 2. В классе структур с достаточно гладким распределением $\beta_1(x)$ справедлива формула

$$I(\omega) = i \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_1^0}} \left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{\lambda} \frac{1-h_2}{h_1^2} + O(1/\lambda^2) \right), \quad (9)$$

где

$$h_1 = -\frac{\beta(1)}{Q_2(1)} \left(1 + i \frac{Q_1(1)}{Q_2(1)} \right) \operatorname{ctg}(\lambda r(1)),$$

$$h_2 = \frac{3}{4} \frac{\beta'(1)}{Q_2^2(1)} + \frac{\beta(1)}{Q_2^2(1)} - \frac{4\beta(1)}{Q_2(1)} \left(i - \frac{Q_1(1)}{Q_2(1)} \right) \frac{R(1)}{\sin^2(\lambda r(1))}.$$

Доказанная теорема означает, что в первом асимптотическом порядке акустический импеданс зависит лишь от величин

$$\beta(1), \beta'(1), \int_0^1 \sqrt{\beta(t)} dt, \int_0^1 \left[\frac{5}{4} \frac{\beta'^2(t)}{\beta^{5/2}(t)} - \frac{\beta''(t)}{\beta^{3/2}(t)} \right] dt.$$

Соответственно в рассматриваемом диапазоне параметров и при погрешности измерений в 1% ультразвуковое зондирование может дать лишь эти величины либо аппроксимацию $\beta(x)$ (например, с помощью многочленов), которая ими определяется однозначно.

Можно заметить также, что повышение точности измерений до 0,1% (это соответствует учету членов второго порядка) может дать несколько более детальное представление о структуре.

Найденное представление оказывается полезным и для формулировки алгоритма расчета характеристик структуры, поскольку прямой численный расчет при больших ω оказывается невозможным.

В заключение авторы благодарят В. Ф. Бутузова за полезные обсуждения и А. Е. Берковича за предоставление некоторых экспериментальных данных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ультразвуковая диагностика. Сб. научных трудов Ин-та прикладной физики АН СССР. Горький, 1983. [2] Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. [3] Трапезникова Н. А., Гласко В. Б. Прикладная геофизика, 1978, № 92, с. 57. [4] Гласко В. Б., Худак Ю. И. ЖВМ и МФ, 1980, 20, с. 482. [5] Гласко В. Б. ЖВМ и МФ, 1970, 10, с. 1465. [6] Федорюк М. В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983.

Поступила в редакцию
27.05.85