ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1986. Т. 27, № 4

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 549.121.7

О ВЫЧИСЛЕНИИ ГЛУБОКОНЕУПРУГИХ АСИМПТОТИК ДИАГРАММ С ВЕКТОРНЫМИ МЕЗОНАМИ В ОБМЕННОМ КАНАЛЕ В ОБЛАСТИ МАЛЫХ x В ФЕЙНМАНОВСКОЙ КАЛИБРОВКЕ

Н. И. Усюкина

(НИИЯФ)

Исследование дважды логарифмических асимптотик глубоконеупругих амплитуд в области малых x достаточно актуально в настоящее время, с одной стороны, в связи с широкими возможностями применения соответствующих теоретических предсказаний для обработки результатов эксперимента, а с другой — в связи с возникающими в процессе рассмотрения этих асимптотик в рамках полевых теорий вопросами чисто теоретического плана.

При анализе асимптотик амплитуд глубоконеупругого рассеяния достаточно плодотворным оказалось использование строгих интегральных представлений типа Йоста—Лемана—Дайсона, вырождающихся в теории возмущений в свой частный случай, известный под названием представления Дезера—Гильберта—Сударшана (ДГС) [1], которое для аналитической функции двух инвариантов q^2, $(q+p)^2$ может быть записано в виде

$$\int_0^1 d\xi\psi(\xi)\int_\Lambda^\infty \frac{d\zeta\rho(\zeta)}{(q+p\xi)^2+\zeta+i\varepsilon}. \tag{1}$$

Технологию написания ДГС-представления и последующего вычисления дважды логарифмических асимптотик на их основе можно продемонстрировать на примере элементарных блоков лестничных и пере-

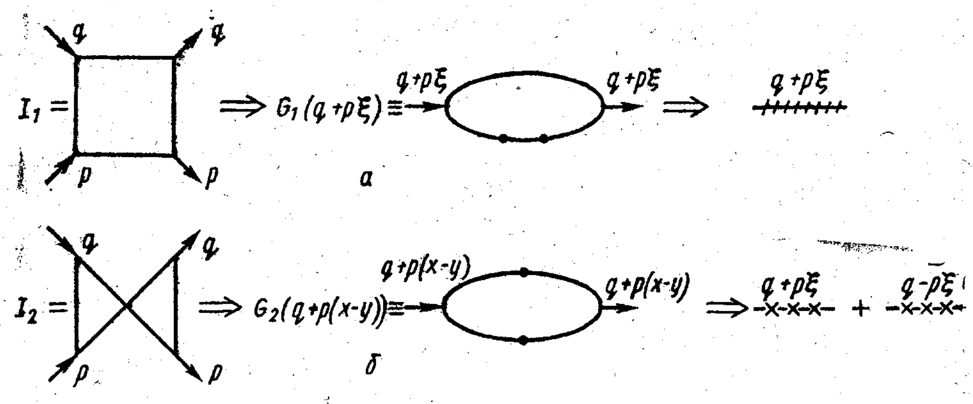

Рис. 1

крестно-лестничных диаграмм φ^3-теории типа рис. 1 (в асимптотической области в спектральных представлениях мы полагаем $p^2=0$, не оговаривая это дополнительно).

В результате свертки по фейнмановским параметрам

$$\frac{1}{(k^2+m^2)^2\{(k-p)^2+m^2\}} = 2\int\limits_0 \frac{d\xi\,(1-\xi)}{\{(k-p\xi)^2+m^2\}^3}$$

диаграмма рис. 1, *а* редуцируется следующим образом:

$$V_1 \Rightarrow \int\limits_0^1 d\xi\,(1-\xi)\,G_1((q+p\xi)^2),$$

где $G_1(k^2)$ — простая петлевая диаграмма. Технология вычисления асимптотик петлевых диаграмм разного вида достаточно хорошо разработана. Можно либо вычислять их в импульсном представлении, воспользовавшись представлением свертки в виде интеграла по фейнмановским параметрам, либо в координатном представлении записать соответствующие пропагаторы, зависящие от масс виртуальных частиц, в виде меллиновских разложений по виртуальным массам, перемножить пропагаторы, соответствующие линиям петли (так как по известной теореме из фурье-анализа фурье-образ свертки равен произведению фурье-образов), и по формулам перехода

$$F\left\{\frac{1}{(k^2-i\varepsilon)^{\alpha}}\right\} = \frac{\pi^2\,4^{2-\alpha}\,\Gamma(2-\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\,\frac{1}{(x^2+i\varepsilon)^{2-\alpha}} \tag{2}$$

вернуться обратно.

Для $G_1(k^2)$ меллиновское разложение приводит к асимптотике

$$\int\limits_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} \frac{da\cdot\Gamma(a)}{(m^2)^{1+a}\,(k^2)^{1-a}} \Rightarrow \frac{1}{m^2k^2}.$$

Таким образом, асимптотика I_1 определяется выражением

$$I_1 \Rightarrow \frac{1}{m^2\cdot 2qp}\int\limits_0^1 \frac{d\xi}{\xi-x}. \tag{3}$$

Аналогично редуцируется диаграмма рис. 1, *б*:

$$I_2 \Rightarrow \int\limits_0^1 dz \int\limits_0^1 dy\cdot G_2((q+p(z-y))^2),$$

где $G_2(k^2)$ — простая петлевая диаграмма, меллиновское разложение которой определяет ее асимптотику:

$$\int\limits_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} \frac{da\cdot\Gamma^3(a)}{\Gamma(2a)\,(m^2)^a\,(k^2)^{2-a}} \Rightarrow \frac{\ln k^2}{(k^2)^2}.$$

Далее простой заменой интеграл

$$\int\limits_0^1 dz \int\limits_0^1 dy\cdot f(z-y)$$

приводится к виду

$$\int\limits_0^1 d\xi\,(1-\xi)\,f(\xi) + \int\limits_0^1 d\xi\,(1-\xi)\,f(-\xi),$$

и I_2 редуцируется к совокупности двух диаграмм такого же вида, что и I_1, причем второе слагаемое получается из первого заменой $q \leftrightarrow -q$:

$$I_2 \Rightarrow \frac{\ln 2qp}{(2qp)^2} \left\{ \int_0^1 \frac{d\xi\,(1-\xi)}{(x+\xi)^2} + \int_0^1 \frac{d\xi\,(1-\xi)}{(-x+\xi)^2} \right\}.$$

При использовании рассмотренной технологии исследования асимптотик элементарных блоков асимптотики лестничных диаграмм с произвольным числом блоков вычисляются путем последовательной поэтапной редукции.

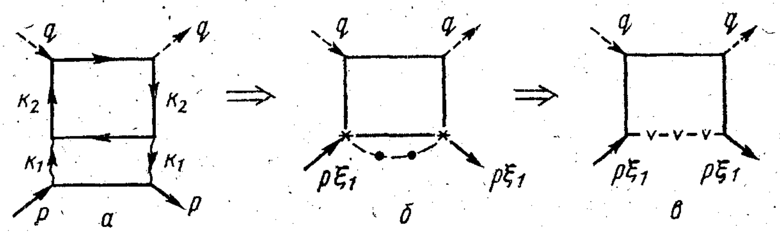

Рис. 2

Рассмотрим асимптотику диаграммы рис. 2, *а*. Сплошной линией на этой диаграмме изображен фермион, взаимодействующий с векторным мезоном (волнистая линия) в фейнмановской калибровке. Суммирование по спинам фермионов приводит к следующей структуре для нижней линии диаграммы рис. 2, *а*:

$$\mathrm{Sp}\,\gamma^\alpha \hat{p}\,\gamma^\beta \hat{p} - \mathrm{Sp}\,\gamma^\alpha \hat{k}_1 \gamma^\beta \hat{p}.$$

Вклады от структуры, соответствующей второму слагаемому, всегда являются предасимптотическими по сравнению с вкладами от структуры первого слагаемого.

Асимптотике функции Грина

$$\frac{1}{(k^2+\mu^2+i\varepsilon)^3} \tag{4}$$

в импульсном представлении при $k^2 \to \infty$ соответствует в координатном представлении асимптотика при $x^2 \to 0$ (см. формулу (2) перехода из импульсного представления в координатное).

Асимптотический ряд в координатном представлении, соответствующий функции Грина (4), можно получить, воспользовавшись для нее представлением Меллина $(0 < a_0 < 1)$ (нормировочные множители на промежуточных этапах опускаются):

$$\frac{1}{(k^2+\mu^2+i\varepsilon)^3} = \int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} \frac{da \cdot \Gamma(1+a)\,\Gamma(2-a)}{\Gamma(3)\,(\mu^2)^{1+a}\,(k^2+i\varepsilon)^{2-a}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} \frac{da \cdot \Gamma(a)\,\Gamma(1+a)}{(\mu^2)^{1+a}\,(x^2-i\varepsilon)^a} = \frac{1}{\mu^2} - \int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} \frac{da \cdot \Gamma^2(a)\,x^2}{(\mu^2)^a\,(x^2-i\varepsilon)^a}. \tag{5}$$

В приведенном выражении выделен асимптотически главный вклад в функцию Грина, соответствующий крайнему правому полюсу подынтегрального выражения в меллиновском интервале, и сдвинут налево контур интегрирования. Первое слагаемое приводит к полюсным по μ^2 вкладам в асимптотику амплитуды глубоконеупругого рассеяния, т. е. в теориях с нулевыми массами векторных мезонов (таких, как, например, электродинамика или хромодинамика) вклады диаграммы рис. 2 содержат инфракрасные расходимости. Нетрудно понять, что, так как результирующая амплитуда в данном порядке теории возмущений не содержит расходимостей в инфракрасной области, вклады полюсного по μ^2 типа для диаграмм рис. 2 и 3 должны сокращаться в сумме.

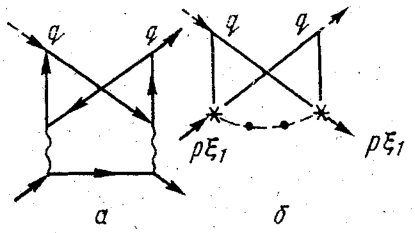

Рис. 3

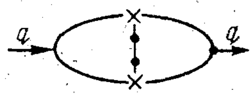

Рис. 4

Действительно, второй этап редукции для полюсного по μ^2 слагаемого в диаграмме рис. 2 (звездочкой на рис. 2, *б* и 4 обозначены структурные множители $\hat{p}$ в вершинах) приводит к выражению вида

$$\int_0^1 \frac{d\xi_2 (1-\xi_2)\cdot 2qp}{q^2+2qp\xi_1\xi_2} I_1^{\mu\nu} + \int_0^1 \frac{d\xi_2(1-\xi_2)\cdot 2qpI_2^{\mu\nu}}{\{q^2+2qp\xi_1\xi_2\}^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2qp\int_0^\infty \frac{d\zeta\cdot I^{\mu\nu}}{(q^2+\zeta)^2\{(q+p\xi_1)^2+\zeta\}} = \frac{1}{\xi_1}\int_0^\infty \frac{d\zeta\cdot I^{\mu\nu}}{q^2+\zeta}\left\{\frac{1}{q^2+\zeta} - \frac{1}{(q+p\xi_1)^2+\zeta}\right\}, \quad (6)$$

где $I^{\mu\nu} = \zeta I_1^{\mu\nu} + I_2^{\mu\nu}$,

$$I_1^{\mu\nu} = \mathrm{Sp}\,\{2\hat{p}\gamma^\mu\hat{q}\gamma^\nu - \hat{p}\hat{q}\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\mu\gamma^\nu\hat{q}\hat{p}\},\ I_2^{\mu\nu} = -\mathrm{Sp}\,\hat{q}\hat{p}\hat{q}\gamma^\mu\hat{q}\gamma^\nu.$$

При приведении к аналогичному виду выражения, соответствующего полюсному по μ^2 вкладу для диаграммы рис. 3, имеем

$$\frac{1}{\xi_1}\int_0^\infty \frac{d\zeta\cdot I^{\mu\nu}(\zeta)}{q^2+\zeta}\left\{\frac{1}{(q+p\xi_1)^2+\zeta} - \frac{1}{(q-p\xi_1)^2+\zeta}\right\}. \quad (7)$$

Второе слагаемое в фигурной скобке (6) соответствует вкладу треугольной диаграммы, которая получается согласно тождеству Уорда при действии на вершину, помеченную звездочкой, множителем $\xi_1\hat{p}$. Аналогичное слагаемое в (7) имеет противоположный знак, что естественно, так как отвечающая диаграмме рис. 3 треугольная диаграмма, полученная при действии $\xi_1\hat{p}$ на соответствующую вершину, имеет противоположную первому случаю ориентацию спинорного цикла и, следовательно, согласно теореме Фарри, противоположный знак.

Таким образом, сложность вычисления глубоконеупругой асимптотики диаграмм с обменом векторными мезонами в обменном канале заключается в том, что «выживающий» в сумме диаграмм рис. 2, 3 вклад является предасимптотическим для каждой отдельной диаграммы.

Использование техники ДГС-представлений позволяет вычислить и его. Действительно, вклад в нижнюю петлю на рис. 2, *б* от второго слагаемого в (5) вычисляется без труда:

$$\frac{\hat{x}}{(x^2-i\varepsilon)^2}\,\frac{x^2}{(x^2-i\varepsilon)^a}=\frac{\hat{x}}{(x^2-i\varepsilon)^{1+a}}\Rightarrow\frac{\hat{k}}{(k^2+i\varepsilon)^{2-a}}.$$

Соответственно для ДГС-представления имеем (отброшены последующие предасимптотические вклады)

$$\int_0^1\frac{d\xi_1(1-\xi_1)\,\hat{p}\,\hat{k}\,\hat{p}}{\{(k-p\xi_1)^2+i\varepsilon\}^{2-a}}\Rightarrow\frac{-\hat{p}}{\{k^2+i\varepsilon\}^{1-a}}+\int_0^1\frac{d\xi_1\cdot\hat{p}}{\{(k-p\xi_1)^2+i\varepsilon\}^{1-a}}+\ldots$$

Первое слагаемое в этом выражении не содержит зависимости от $(k+p)^2$ и не будет содержать ее в результирующей амплитуде при любой последующей редукции, второе же слагаемое при редукции второго блока приводит к дважды логарифмическому вкладу для диаграммы рис. 2 вида

$$\int_0^1 d\xi_1\int_0^1 d\xi_2\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty}\frac{da\cdot\Gamma^3(a)}{(m^2)^a}\,\frac{\mathrm{Sp}\,\hat{p}\,\gamma^\mu\,(\hat{q}+\hat{p}\xi_1\xi_2)\,\gamma^\nu}{\{(q+p\xi_1\xi_2)^2\}^{1-a}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\ln^2 2qp}{2qp}\int_0^1\frac{d\xi\ln\xi}{\xi-x}\,\mathrm{Sp}\,\hat{p}\gamma^\mu\,(\hat{q}+\hat{p}\xi_1)\,\gamma^\nu. \qquad (8)$$

Приведем схему вычисления вклада, аналогичного (8), для диаграммы рис. 3. Прежде чем перейти к рассмотрению глубоконеупругой асимптотики, вычислим асимптотику петлевой функции Грина, соответствующей диаграмме рис. 4. Полученные результаты, как нетрудно понять, будут использованы для получения глубоконеупругой асимптотики. При вычислении свертки такого вида в асимптотической области (а тем более при вычислении соответствующей глубоконеупругой асимптотики диаграммы рис. 3, *б* — см. ниже) удобно воспользоваться координатным представлением. Тогда для вычисления асимптотики свертки

$$\int d\eta G_1^\alpha(x-\eta)\,G_2(\eta-z)\,G_1^\beta(\eta-y), \qquad (9)$$

где

$$G_1^\alpha(x)=\frac{x^\alpha}{(x^2-i\varepsilon)^2},\quad G_2(x)=\frac{x^2}{(x^2-i\varepsilon)^a},$$

представим числитель функции Грина $G_2(\eta-z)$ в виде суммы трех слагаемых:

$$(\eta-z)^2=(x-\eta)^2+(x-z)^2-2(x-z)(x-\eta). \qquad (10)$$

Нас интересуют вклады, имеющие полюс по a (так как именно вклады такого типа оказываются существенными в дважды логарифмическом приближении соответствующих глубоконеупругих амплитуд). Интегрирование G_1 по η, а затем по z с функцией Грина $G_2^{(3)}$, где

$$G_2^{(3)}=\frac{2(x-z)(x-\eta)}{\{(\eta-z)^2-i\varepsilon\}^a},$$

не приводит к полюсным вкладам по a. В этом можно убедиться непосредственно, вычисляя свертки по z, η, либо воспользовавшись следующим правилом. Положим в $G_2^{(3)}$ $a=0$, сохранив, однако, структуру, соответствующую числителю, тогда петлевая диаграмма превращается в простую петлевую диаграмму без «перетяжки», соответствующие свертки легко вычисляются и не содержат расходимостей, что свидетельствует об отсутствии полюсов по a. Таким образом, существенные в дважды логарифмическом приближении структуры соответствуют двум первым слагаемым в (10), вычисление асимптотики для которых несложно:

$$\int \frac{d\eta\,(x-\eta)^{\alpha}\,(y-\eta)^{\beta}}{(x-\eta)^2\,\{(\eta-y)^2\}^2\,\{(z-\eta)^2\}^a} \Rightarrow \Gamma(a)\,\frac{\partial}{\partial y^{\beta}}\,\frac{(x-y)^{\alpha}}{\{(x-y)^2\}^a} \Rightarrow \frac{q^{\alpha}q^{\beta}}{(q^2)^{3-a}} \tag{11}$$

и т. д.

Для вычисления глубоконеупругой асимптотики диаграммы рис. 3, *б* (со вторым слагаемым из (5) вместо пунктирной линии) вместо простой свертки (9) имеем свертку вида ($\mathscr{P}=p\xi$)

$$\int d\eta\cdot e^{i\mathscr{P}\eta}\,G_1^{\alpha}(x-\eta)\,G_2(\eta-z)\,G_1^{\beta}(\eta-y),$$

которая в α-представлении соответствует параметрическому интегралу

$$\frac{\partial}{\partial y^{\beta}}\int_0^{\infty} d\lambda\cdot\lambda^a\int \Pi d\alpha_i\,\delta\,(1-\Sigma\alpha_i)\;\alpha_1^{a-1}\,\{(x-y)^{\alpha}\,\alpha_3+(x-z)^{\alpha}\,\alpha_1\}\times$$

$$\times\, e^{i\mathscr{P}(\alpha_1 z+\alpha_2 x+\alpha_3 y)}\,e^{-i\lambda\{(x-y)^2\alpha_2\alpha_3+(x-z)^2\alpha_1\alpha_3+(y-z)^2\alpha_1\alpha_2\}},$$

сводящемуся в интересующей нас области $\alpha\sim0$ к выражению (ср. (11))

$$\Gamma(a)\,\frac{\partial}{\partial y^{\beta}}\,\frac{(x-y)^{\alpha}}{\{(x-y)^2\}^a}\int\prod_1^2 d\beta_1\delta\,(1-\Sigma\beta_i)\,e^{i\beta_1\mathscr{P}x+i\beta_2\mathscr{P}y}.$$

В результате редукции для дважды логарифмического вклада диаграммы рис. 3 получаем

$$\int_0^1 d\xi_1\int_0^1 d\xi_2\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty}\frac{da\cdot\Gamma^3(a)}{(m^2)^a}\left\{\frac{1}{(q^2+2qp\xi_1\xi_2)^{1-a}}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{(q^2-2qp\xi_1\xi_2)^{1-a}}\right\}\mathrm{Sp}\,\gamma^{\mu}\,(\hat{q}+\hat{p}\xi_1\xi_2)\,\gamma^{\nu}\hat{p}.$$

Таким образом, редукция диаграммы рис. 3 также приводит к дважды логарифмическим вкладам в асимптотику, причем в отличие от асимптотик полюсного по μ^2 типа асимптотики, имеющие дважды логарифмический характер, для диаграмм рис. 2, 3 одинаковы численно и входят в полную амплитуду с одинаковым знаком. Действительно, этот результат можно предвидеть, если воспользоваться соображениями, аналогичными приведенным для доказательства сокращения полюсных по μ^2 вкладов. Однако в последнем случае в результате умножения на $\hat{p}\xi_1$ получаем не тройные спинорные циклы, а диаграммы с четырьмя пропагаторами, которые не компенсируют друг друга, а складываются с одинаковым знаком.

Мы показали, что при использовании соответствующей техники вычислений рассмотрение глубоконеупругих асимптотик в области малых x для перекрестно-лестничных диаграмм в фейнмановской калибровке не представляет трудностей. Так, в фейнмановской калибровке без особого труда могут быть вычислены соответствующие асимптотики всех диаграмм с векторными мезонами в обменном канале, представляющие основной интерес в рассматриваемой области квантовой хромодинамики.

Как известно, использование специальных калибровок (аксиальной и планарной), хорошо зарекомендовавших себя при рассмотрении асимптотик в главном логарифмическом приближении в области x, не слишком близких к границам допустимого в глубоконеупругом рассеянии изменения этой переменной, при переходе к области $x \to 0$ приводит к дополнительным, весьма существенным трудностям [2, 3]. В этой связи представляет интерес исследование соответствующих асимптотик в фейнмановской калибровке. Сравнение приведенного в настоящей работе рассмотрения с аналогичным рассмотрением работы [3] доказывает целесообразность такого исследования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Deser S., Gilbert W., Sudarshan E. C. G. Phys. Rev., 1959, 115, p. 731; Nakanishi N. Progr. Theor. Phys., 1961, 25, p. 296. [2] Mueller A. H. Phys. Lett., 1981, **B104**, p. 161; Nucl. Phys., 1983, **B213**, p. 85. [3] Mitra N. Phys. Lett., 1983, **B121**, p. 56; Nucl. Phys., 1983, **B218**, p. 145.

Поступила в редакцию
07.05.85

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1986, Т. 27, № 4

УДК 531.19

О КРИТЕРИИ ПЕРЕКРЫТИЯ РЕЗОНАНСОВ И ДЕФОРМАЦИИ СЕПАРАТРИС

П. В. Елютин

(кафедра квантовой радиофизики)

Среди задач стохастической динамики гамильтоновых систем определение условия перехода к глобальной стохастичности является одной из важнейших [1, 2]. Для интегрируемых систем с периодическим по времени возмущением Чириковым [3] был предложен критерий, отождествляющий такой переход с пересечением сепаратрис ближайших по переменным действия резонансов системы и возмущения. Впоследствии критерий совершенствовался: были учтены резонанс на субгармонике и конечность ширины стохастического слоя [4]. В ходе дальнейшего развития теории стало ясно, что механизм перехода к глобальной стохастичности является более тонким; он связан не с перекрытием резонансов низших порядков, а с разрушением благородных торов [5]. Однако критерий перекрытия резонансов сохраняет свою ценность в качестве достаточного условия глобальной стохастичности.

Обычно при вычислениях форма сепаратрис описывается весьма симметричными выражениями, пригодными лишь в пределе слабого возмущения. Очевидно, на пороге глобальной стохастичности возмущение уже не является малым. И действительно, асимметрия окутывающего сепаратрису стохастического слоя на компьютерных графи-