

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Летохов В. С., Чеботаев В. П. Принципы нелинейной лазерной спектроскопии. М.: Наука, 1975. [2] Раутиан С. Г., Смирнов Г. И., Шалагин А. М. Нелинейные резонансы в спектрах атомов и молекул. Новосибирск: Наука, 1979. [3] Бродниковский А. М., Задков В. Н., Каримов М. Г., Коротеев Н. И. Опт. и спектр., 1983, 54, с. 385. [4] Бродниковский А. М., Гладков С. М., Каримов М. Г., Коротеев Н. И. ЖЭТФ, 1983, 84, с. 1664. [5] Задков В. Н., Коротеев Н. И., Рычев М. В., Федоров А. Б. Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон., 1984, 25, № 4, с. 27. [6] Bloembergen N., Shen Y. R. Phys. Rev., 1964, 133, p. A37. [7] Boyd R. W., Raymer M. G., Narum P., Harter D. J. Phys. Rev., 1981, A24, p. 411. [8] Kaiser W., Maier M., Giordmaine J. A. Phys. Rev., 1969, 177, p. 580. [9] Ахманов С. А., Коротеев Н. И. Методы нелинейной оптики в спектроскопии рассеяния света. М.: Наука, 1981. [10] Дьяков Ю. Е., Никитин С. Ю. Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон., 1984, 25, № 5, с. 41. [11] Дьяков Ю. Е., Никитин С. Ю. В кн.: Тез. докл. Всесоюз. конф. по когерентной и нелинейной оптике. М., 1985, с. 221; Дьяков Ю. Е., Никитин С. Ю. Задачи по статистической радиофизике и оптике. М.: Изд-во МГУ, 1985, с. 106. [12] Schwarz S. E., Tan T. Y. Appl. Phys. Lett., 1967, 10, p. 4. [13] Hillman L. W., Boyd R. W., Krasinski J., Stroud C. R. Opt. Comm., 1983, 45, p. 416. [14] Boyd R. W., Mukamel S. Phys. Rev., 1984, A29, p. 1973.

Поступила в редакцию  
31.05.85

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1986, Т. 27, № 4

УДК 535.41

### ДИФРАКЦИОННАЯ ТЕОРИЯ МНОГОЛУЧЕВОГО ИНТЕРФЕРОМЕТРА

А. В. Белинский, А. С. Чиркин

*(кафедра общей физики и волновых процессов; кафедра научной информации МГУ)*

Широкое использование многолучевых интерферометров, в особенности интерферометра Фабри—Перо, при самых разнообразных спектральных измерениях обуславливает необходимость разработки адекватной теории этих устройств, учитывающей дифракционные эффекты.

Дифракционная теория оптических резонаторов лазеров, в том числе и резонатора Фабри—Перо, развита в ряде работ [1—3] и, по существу, полностью исчерпывает данный вопрос. Вместе с тем характер стационарных колебаний в многолучевом интерферометре и в таком же резонаторе существенно различен. Это связано с тем, что интерферометр работает как пассивный прибор, к которому в отличие от резонатора непрерывно подводится внешнее, освещающее интерферометр излучение. Обычно считают, что в интерферометре Фабри—Перо (ИФП) имеет место резонанс совокупности плоских волн, распространяющихся под определенными углами, и поле в ИФП представляет собой поле однородных плоских волн [2, 4], что, строго говоря, справедливо лишь в случае бесконечных зеркал. Поэтому задача разработки дифракционной теории многолучевого интерферометра с учетом конечных размеров зеркал по-прежнему остается актуальной. Решению этого вопроса на основе модового подхода посвящена данная работа.

Рассмотрение будем производить на примере ИФП с плоскими зеркалами. Излагаемый же ниже общий подход справедлив, разумеется, и для интерферометров со сферическими и цилиндрическими зеркалами.

Пусть ИФП с двумя одинаковыми плоскими зеркалами, расположенными симметрично относительно начала системы координат  $x, y, z$  на расстоянии  $2l$  друг от друга, освещается монохроматической волной, распространяющейся в положительном направлении оси  $z$ , электрическое поле которой  $E_{\text{вх}}(\mathbf{r}, z, t) = A_{\text{вх}}(\mathbf{r}, z) e^{i(\omega t - kz)} + \text{к.с.}$ , где  $\omega$  — частота волны,  $k$  — волновое число,  $t$  — время,  $\mathbf{r}$  — вектор, параллельный поверхности зеркал и перпендикулярный оси  $z$ ,  $A_{\text{вх}}(\mathbf{r}, z)$  — медленно меняющаяся комплексная амплитуда.

Установившееся поле в ИФП представим в виде суммы двух волн, распространяющихся в противоположных направлениях:

$$E(\mathbf{r}, z, t) = A^+(\mathbf{r}, z) e^{i(\omega t - kz - \varphi')} + A^-(\mathbf{r}, z) e^{i(\omega t + kz + \varphi'')},$$

причем амплитуды  $A^+$  и  $A^-$  в квазиоптическом приближении удовлетворяют параболическим уравнениям

$$\Delta_{\perp} A^{\pm}(\mathbf{r}, z) \mp i \cdot 2k \frac{\partial A^{\pm}(\mathbf{r}, z)}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

где  $\Delta_{\perp}$  — поперечный лапласиан.

Решение уравнений (1) с граничными условиями на зеркалах при  $z = \mp l$  приводит к интегральному уравнению для  $A^+(\mathbf{r}, l)$ :

$$A^+(\mathbf{r}, l) = e^{i \cdot 4kl} \int_{-\infty}^{\infty} R(\mathbf{r}') R(\mathbf{r}'') G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', 2l) G(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'', 2l) \times \\ \times A^+(\mathbf{r}'', l) d^2 r'' d^2 r' + e^{i(kl - \varphi')} \int_{-\infty}^{\infty} \tau(\mathbf{r}') G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', 2l) A_{\text{вх}}(\mathbf{r}', -l) d^2 r', \quad (2)$$

где  $R(\mathbf{r})$  и  $\tau(\mathbf{r})$  — амплитудные коэффициенты отражения и пропускания зеркал соответственно (для простоты зеркала считаем одинаковыми), а

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', 2l) = \frac{k}{4\pi l} \exp \left\{ i \left[ k \frac{(x - x')^2 + (y - y')^2}{4l} - \frac{\pi}{2} \right] \right\}$$

— функция Грина уравнения (1).

Уравнение (2) можно представить в виде

$$A(\mathbf{r}) = \mu^2 L^2 [A(\mathbf{r})] + A^0(\mathbf{r}), \quad (3)$$

где  $A(\mathbf{r}) = A^+(\mathbf{r}, l)$  — его собственные функции,  $\mu^2 = R^2 e^{i \cdot 4kl}$  — собственные значения, а  $L[A(\mathbf{r})] = \int_S G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', 2l) A(\mathbf{r}') d^2 r'$  — линейный

симметричный, не зависящий от  $\mu$  интегральный оператор, причем интеграл берется по площади зеркала  $S$ ,  $L^{(2)} = L \cdot L$ ,

$$A^0(\mathbf{r}) = e^{i(kl - \varphi')} \int_{-\infty}^{\infty} \tau(\mathbf{r}') G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', 2l) A_{\text{вх}}(\mathbf{r}', -l) d^2 r'$$

— внешнее воздействие.

Уравнение (3) отличается от соответствующего уравнения резонатора наличием слагаемого  $A^0(\mathbf{r})$ . Поэтому в отличие от ситуации в резонаторе поле на выходном зеркале многолучевого интерферометра описывается неоднородным уравнением. Отметим, что рассмотрение интерферометров со сферическими или цилиндрическими зеркалами

также приводит к уравнению вида (3) с несколько отличающимися в каждом конкретном случае  $\mu^2$ ,  $L^{(2)}$  и  $A^0(\mathbf{r})$ .

Решение уравнения (3) ищем в виде разложения по собственным функциям  $A_m(\mathbf{r})$  соответствующего однородного уравнения с весовыми коэффициентами  $C_m$  [3]:

$$A(\mathbf{r}) = \sum_m C_m A_m(\mathbf{r}). \quad (4)$$

Собственные функции (моды) резонатора  $A_m(\mathbf{r})$  и их собственные значения хорошо изучены и могут быть найдены либо расчетным путем [1], либо приближенно аналитически [3]. Коэффициенты  $C_m$  каждой моды определяются как

$$C_m = \frac{\int_S A_m(\mathbf{r}) A^0(\mathbf{r}) d^2r}{N_m (1 - \mu^2 / \mu_m^2)}, \quad (5)$$

где  $N_m = \int_S A_m^2(\mathbf{r}) d^2r$  — норма  $m$ -й моды,  $A_m(\mathbf{r})$  и  $\mu_m$  — собственные функции и значения однородного интегрального уравнения

$$A(\mathbf{r}) = \mu L[A(\mathbf{r})].$$

В силу симметрии системы относительно плоскости  $xOy$  в отсутствие внешнего воздействия

$$A_m(\mathbf{r}) = \mu_m^2 L^{(2)}[A_m(\mathbf{r})].$$

Собственные значения  $\mu_m = e^{i\chi_m}$  и  $\chi_m$  в общем случае комплексны: комплексность  $\chi_m$  обусловлена потерями в резонаторе. В качестве «эталонного» резонатора, в котором могут существовать стационарные колебания в отсутствие внешнего воздействия, разумно выбрать резонатор с той же геометрией, что и в многолучевом интерферометре, но с единичным коэффициентом отражения зеркал ( $R(\mathbf{r})=1$  по площади зеркала и  $R(\mathbf{r})=0$  вне ее) и компенсацией дифракционных потерь. Реально это может быть резонатор с активной средой, усиление которой достаточно для компенсации дифракционных потерь.

Обозначая потери через  $\alpha = \exp[-\text{Im}(\chi_m)]$ , куда можно включить и потери на поглощение в среде, запишем  $(\mu/\mu_m)^2$  в (5) как

$$(\mu/\mu_m)^2 = \alpha^2 \exp\{i \cdot 2[\chi - \text{Re}(\chi_m)]\},$$

где  $\chi = 2kl$  — действительное.

Обратим внимание, что в рассматриваемом случае непоглощающих зеркал, т. е.  $\tau(\mathbf{r}) = \tau = \text{const}$  в пределах зеркал, в уравнении (3)

$$A^0(\mathbf{r}) = C\tau L[A_{\text{вх}}(\mathbf{r}, -l)], \quad (6)$$

где  $C$  — постоянный коэффициент. Подставляя (6) в (5), в силу симметричности оператора  $L$  получаем

$$C_m = \frac{C\tau e^{-i\text{Re}(\chi_m)} \int_S A_{\text{вх}}(\mathbf{r}, -l) A_m(\mathbf{r}) d^2r}{N_m \{1 - \alpha^2 e^{i \cdot 2[\chi - \text{Re}(\chi_m)]}\}}. \quad (7)$$

Из выражений (7) и (4), в частности, видно, что если входное излучение представляет собой одну из мод резонатора ( $A_{\text{вх}}(\mathbf{r}, -l) =$

$= A_m(\mathbf{r})$ ), то из-за ортогональности собственных функций резонатора  $A_m(\mathbf{r})$  получим

$$A(\mathbf{r}) = \frac{C\tau e^{-i\text{Re}(\chi_m)}}{1 - \alpha^2 e^{i \cdot 2[\chi - \text{Re}(\chi_m)]}} A_m(\mathbf{r}). \quad (8)$$

Следовательно, на выходе интерферометра остается та же мода, что и на входе, а множитель перед  $A_m(\mathbf{r})$  в (8) можно назвать коэффициентом передачи моды.

Таким образом, задача построения дифракционной теории многолучевого интерферометра в общем виде решена. Особенности ее использования рассмотрим на примере ИФП, образованного прямоугольными зеркалами размерами  $M_x \times M_y$ .

Переменные  $x$  и  $y$  в уравнениях (1) и (2) в этом случае разделяются, и можно перейти к однокоординатному рассмотрению. Введем безразмерные переменные  $u = x \sqrt{k/(2l)}$  и  $M = M_x \sqrt{k/(2l)}$  и обозначим  $f(u) = A^+(x, l)$ . Тогда получим уравнение, аналогичное (2)

$$f(u) = \frac{R^2 e^{i(4kl - \pi/2)}}{2\pi} \int_{-M/2}^{M/2} e^{i(u-u')^2/2} \int_{-M/2}^{M/2} e^{i(u''-u')^2/2} f(u'') du'' du' + \\ + \frac{\tau e^{i(kl - \varphi' - \pi/4)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-M/2}^{M/2} e^{i(u-u')^2/2} f_{\text{вх}}(u') du',$$

решение которого в соответствии с (4) и (7) запишем в виде

$$f(u) = \tau e^{i(kl - \varphi')} \sum_m \frac{e^{-i \cdot 2l \text{Re}(k_m)}}{1 - R^2 e^{-4l |\text{Im}(k_m)|} e^{i \cdot 4l [k - \text{Re}(k_m)]}} \times \\ \times \frac{\int_{-M/2}^{M/2} f_m(u) f_{\text{вх}}(u) du}{\int_{-M/2}^{M/2} [f_m(u)]^2 du} f_m(u), \quad (9)$$

где  $k_m = \chi_m/(2l)$ , а  $f_m(u)$  — собственные функции одномерного резонатора с зеркалами в виде бесконечных полос [1]. Аналитически  $f_m(u)$  и  $k_m$  могут быть приближенно представлены следующим образом [3]:

$$f_m(u) = \begin{cases} \cos \left\{ \frac{\pi m u}{M \left( 1 + \beta \frac{1+i}{M} \right)} \right\} & \text{при } m = 1, 3, \dots, \\ \sin \left\{ \frac{\pi m u}{M \left( 1 + \beta \frac{1+i}{M} \right)} \right\} & \text{при } m = 2, 4, \dots, \end{cases} \quad (10)$$

$$2k_m l = \pi q + \frac{\pi m^2}{2(M + \beta + i\beta)^2}, \quad (11)$$

где  $\beta \approx 0,824$ ,  $q$  — целое число. В результате норма

$$N_m = \frac{M}{2} \pm \frac{M \left( 1 + \beta \frac{1+i}{M} \right)}{2\pi m} \sin \frac{\pi m}{1 + \beta \frac{1+i}{M}},$$

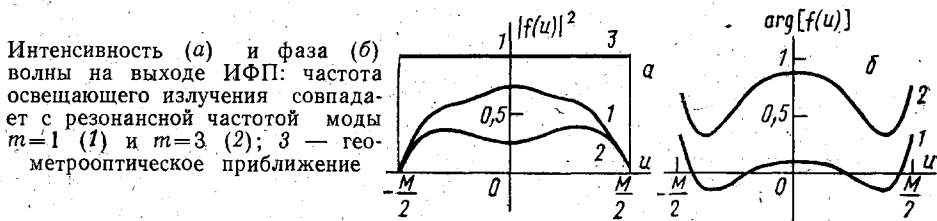
где знаку плюс соответствуют нечетные  $m$  и знаку минус — четные. При  $M \gg 1$   $N_m \approx M/2 + \beta(1+i)/2$ .

Если ИФП освещается плоской волной, параллельной зеркалам, то  $f_{\text{вх}}(u) = F_{\text{вх}} - \text{const}$  и

$$f(u) \simeq \frac{4\tau F_{\text{вх}} e^{i(kl - \varphi')}}{\pi} \sum_m \frac{e^{-i \cdot 2\text{Re}(k_m)} \sin \frac{\pi m}{2[1 + \beta(1+i)/M]}}{1 - R^2 e^{-4l|\text{Im}(k_m)|} e^{i \cdot 4l(k - \text{Re}k_m)}} \cdot \frac{f_m(u)}{m}. \quad (12)$$

Здесь  $m$  нечетно, т. е. присутствуют только четные моды, амплитуда которых убывает с ростом значения  $m$ .

Распределения интенсивности и фазы на выходе ИФП при различных условиях возбуждения показаны на рисунке. Видно, что дифракционные эффекты оказывают существенное влияние: в отсутствие дифракции выходящее из ИФП излучение представляло бы собой по всей площади зеркала плоскую волну.



В другом предельном случае, устремляя поперечные размеры освещающего ИФП пучка к нулю,  $f_{\text{вх}}(u) = F_{\text{вх}}\delta(u)$ , где  $\delta(u)$  — дельта-функция, получим

$$f(u) \simeq \frac{2\tau F_{\text{вх}} e^{i(kl - \varphi')}}{M + \beta(1+i)} \times \sum_m \frac{e^{-i \cdot 2\text{Re}(k_m)} f_m(u)}{1 - R^2 e^{-4l|\text{Im}(k_m)|} e^{i \cdot 4l(k - \text{Re}k_m)}}, \quad (13)$$

где  $m$  нечетно.

В отличие от (12) в (13) отсутствует явная зависимость модового коэффициента передачи от индекса  $m$ ; иначе говоря, амплитуды высших мод с ростом  $m$  убывают менее резко и их вклад становится более значительным. Поэтому (13) дает лишь качественное описание, поскольку с ростом  $m$  приближение (10), (11) становится менее корректным.

Предельный случай бесконечных зеркал, фактически реализуемый для мод  $m \ll M_x/a$ , где  $a$  — поперечный размер освещающего ИФП пучка, заслуживает отдельного рассмотрения. При этом есть возможность сравнить результаты развитой нами дифракционной теории с результатами анализа ИФП при помощи передаточной функции для плоских волн [4].

Собственными функциями резонатора, образованного параллельными плоскими зеркалами, являются плоские волны [3]

$$f_m(u) = e^{-i\kappa_m u}, \quad (14)$$

где  $\kappa_m = \pm \sqrt{4\pi\rho_m}$ ,  $\rho_m = \rho_0 + m$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ , а  $\rho_0$  в одномерном случае положим равным нулю, что соответствует резонансу нулевого порядка волны, параллельной зеркалам.

Подставляя (14) в (9), получаем, что выражение (9) дает результаты лишь в случае, если  $f_{\text{вх}}(u) = F_{\text{вх}} e^{-i\kappa_m u}$ , т. е. (14) представляет собой резонансную плоскую волну либо сумму резонансных волн. Тог-

да, воспользовавшись (8), с учетом  $\kappa_m^2 = 4\pi m$  получим передаточную функцию ИФП для резонансных угловых частот:

$$H(\kappa_m) = \tau^2 e^{i(kl - \varphi')} \frac{e^{-i\kappa_m^2/2}}{1 - R^2 e^{i(4kl - \kappa_m^2)}} \quad (15)$$

Обобщая (15) на случай произвольного  $\kappa$  и перехода к угловым частотам по переменной  $\kappa = u \sqrt{2l/k}$ , получим выражение передаточной функции ИФП:

$$H(\kappa_x) = \tau^2 e^{i(kl - \varphi')} \frac{e^{-il\kappa_x^2/k}}{1 - R^2 e^{i(4kl - 2l\kappa_x^2/k)}} \quad (16)$$

которое совпадает с выражением, полученным в [4].

Таким образом, в предельном случае развитый модовый подход дает результат, совпадающий с результатом спектрального подхода [4], справедливым лишь в случае бесконечных зеркал.

Результаты настоящей работы дают возможность количественно описать влияние конечных размеров зеркал и освещающего пучка излучения на эффективность его преобразования многолучевым интерферометром.

В заключение подчеркнем, что развитый модовый подход к описанию многолучевых интерферометров с учетом явления дифракции пригоден для зеркал различной формы. Точность получаемых при этом аналитических результатов зависит лишь от точности представления собственных функций соответствующего свободного резонатора.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Фокс А., Ли Т. В кн.: Лазеры. М.: ИЛ, 1963, с. 325. [2] Бойд Дж., Гордон Дж. Там же, с. 363. [3] Вайнштейн Л. А. Открытые резонаторы и открытые волноводы. М.: Сов. радио, 1966. [4] Дубнищев Ю. Н., Ринкевичус Б. С. Методы лазерной доплеровской анометрии. М.: Наука, 1982, с. 195.

Поступила в редакцию  
12.05.85

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ, 1986, Т. 27, № 4

УДК 535.37

#### АППРОКСИМАЦИЯ КОНТУРА ПОЛОСЫ ПОГЛОЩЕНИЯ АССОЦИИРОВАННЫХ МОЛЕКУЛ КРАСИТЕЛЕЙ

В. И. Южаков, В. М. Бойцов

(кафедра общей физики для физического факультета)

Для многих задач молекулярной спектроскопии, а также при различных расчетах в случае применения растворов красителей появляется необходимость аналитического описания контура полос их электронных спектров. Такое описание необходимо и для полос поглощения ассоциированных молекул красителей. Известен ряд способов описания сплошных полос поглощения и люминесценции [1—5]. Главным недостатком получаемых при этом соотношений является наличие большого числа параметров, подлежащих экспериментальному опреде-