ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1986. Т. 27, № 5

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 519.95

О ТОЧНОСТИ И НАДЕЖНОСТИ ИНТЕРПРЕТАЦИИ СОВОКУПНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ

Ю. П. Пытьев

(кафедра математики)

Рассмотрим серию измерений вектора $f \in \mathscr{R}$

$$\xi_i = A_i f + \nu_i \in \mathscr{R}_i, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

где вектор ξ_i — результат измерения f на приборе A_i; ν_i — сопутствующая погрешность; $\mathscr{R}$, $\mathscr{R}_i$ — евклидовы пространства, $i=1, \ldots, n$. Будем считать, что в (1) A_i — известный линейный оператор, определяющий математическую модель i-го измерительного прибора, вектор ν_i, определяющий погрешность i-го процесса измерения f, имеет нулевое математическое ожидание, $\mathbf{E}\nu_i = 0$, и известный корреляционный оператор Σ_{ii}, $i=1, \ldots, n$. Более того, будем считать известным полный корреляционный оператор $\Sigma_{(n)} = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{1n} \\ \vdots & \vdots \\ \Sigma_{n1} & \Sigma_{nn} \end{pmatrix}$ вектора $\nu_{(n)} = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_n \end{pmatrix}$, задающий взаимные корреляционные связи измерений в (1). Если под $A_{(n)}$ и $\xi_{(n)}$ понимать соответственно оператор $\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$ и вектор $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$, то схему измерения (1) можно записать в компактном виде

$$\xi_{(n)} = A_{(n)} f + \nu_{(n)} \in \mathscr{R}_{(n)} = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathscr{R}_i \tag{2}$$

и интерпретировать $\xi_{(n)}$ как искаженный шумом $\nu_{(n)}$ выходной сигнал прибора $A_{(n)}$, на вход которого поступил сигнал f. Пару операторов $[A_{(n)}, \Sigma_{(n)}]$ назовем моделью схемы измерения (2). Сигнал f до измерения будем считать произвольным вектором $\mathscr{R}$.

Равенства (1) связывают объект f и его оптические изображения ξ_i в различных участках спектра, зависимость от энергии сечения f рассеяния γ-излучения веществом и выходные сигналы спектрометров, полученные в различных лабораториях, и т. п., $i=1, \ldots, n$.

Как правило, для интерпретации измерений (1) исследователю желательно выделить частично или полностью сигнал f, т. е. получить некоторую функцию Uf от f. С этой целью $\xi_{(n)}$ можно преобразовать к виду $R\xi_{(n)}$, подчинив оператор R следующим условиям:

$$RA_{(n)} = U, \quad \mathbf{E}\,\| R\xi_{(n)} - Uf \|^2 = \mathbf{E}\,\| R\nu_{(n)} \|^2 \sim \min_{R},$$

согласно которым

$$R\xi_{(n)} = Uf + R\nu_{(n)} \tag{3}$$

— наиболее точная версия Uf, основанная на измерении $\xi_{(n)}$ и модели $[A_{(n)}, \Sigma_{(n)}]$. $R\xi_{(n)}$ называется редукцией $\xi_{(n)}$ к Uf, или, иначе говоря, к прибору U*.

* Не следует думать, что $\xi_{(n)}$ допускает редукцию к любому прибору U. Это возможно лишь при выполнении условия $U(I - A_{(n)}^{-} A_{(n)}) = 0$ [1].

Характерно, что погрешность редукции $h^{1/2}(A_{(n)}, \Sigma_{(n)}, U)$, равная

$$(\mathbf{E}\,\|R\xi_{(n)}-Uf\|^2)^{1/2}=(\operatorname{Tr} U\,(A^*_{(n)}\Sigma^{-1}_{(n)}A_{(n)})^- U^*)^{1/2} \tag{4}$$

не зависит ни от f, ни от измерения $\xi_{(n)}$ и полностью определяется моделью $[A_{(n)}, \Sigma_{(n)}]$ и прибором U [1]. Поэтому интерпретация измерений (1) не может быть основана только на соотношениях (3), (4) и должна быть дополнена исследованием состоятельности модели $[A_{(n)}, \Sigma_{(n)}]$. В данном случае речь идет об исследовании непротиворечивости отдельных измерений в (1) и выяснении того, насколько модель $[A_{(n)}, \Sigma_{(n)}]$ в целом отвечает реальному положению вещей.

Эти вопросы исследованы в работе [2], где введено понятие надежности модели $[A, \Sigma]$ как минимальной вероятности ошибочно отвергнуть модель на основании измерения ξ в пользу одной из заданного класса альтернативных моделей $[\tilde{A}, \Sigma]$, $\tilde{A}\neq A$. При этом предполагалось, что, возможно, $\xi=\tilde{A}f+\nu$, но ν — в любом случае $\mathcal{N}(0, \Sigma)$ случайный вектор. Если надежность оказывалась малой, модель $[A, \Sigma]$ классифицировалась как несостоятельная и отвергалась.

Разумеется, на практике не приходится рассчитывать на безупречно точную модель, и вопрос состоит лишь в том, допустимо ли использовать ту или иную модель при интерпретации измерения. В данной работе будет показано, при каких условиях отдельные измерения с приближенно заданными моделями в совокупности порождают достаточно надежную или, напротив, несостоятельную модель.

1°. Вначале покажем, что учет любого измерения в (1) не может увеличить погрешность редукции остальных измерений. Для этого достаточно показать, что для любых двух измерений в (1), скажем, для i-го и j-го, качество* объединенной модели $[A_{(2)}, \Sigma_{(2)}]=\left[\begin{pmatrix}A_i\\ A_j\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\Sigma_{ii} & \Sigma_{ij}\\ \Sigma_{ji} & \Sigma_{jj}\end{pmatrix}\right]$ не ниже, чем качество любой из моделей $[A_i, \Sigma_{ii}]$, $[A_j, \Sigma_{jj}]$ [1]. В обозначениях, принятых в работе [1], следует показать, что

$$[A_{(2)}, \Sigma_{(2)}]\prec[A_\alpha, \Sigma_{\alpha\alpha}],\ \alpha=i,\ j. \tag{5}$$

Лемма 1. Для любых двух моделей $[A_i, \Sigma_{ii}]$, $[A_j, \Sigma_{jj}]$ коррелированных измерений в (1) выполняется сравнение (5).

Доказательство. Для простоты выкладок будем считать, что Σ_{ii} и Σ_{jj} — невырожденные операторы. Покажем, что

$$\Sigma^{-1}_{(2)}=\begin{pmatrix}\Sigma_{ii} & \Sigma_{ij}\\ \Sigma_{ji} & \Sigma_{jj}\end{pmatrix}^{-1}>\begin{pmatrix}\Sigma^{-1}_{ii} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \Sigma^{-1}_{jj}\end{pmatrix}, \tag{6}$$

откуда будет следовать (5), если учесть, что в любом случае $A^-_{(2)}A_{(2)}\geqslant A^-_\alpha A_\alpha$, и, как следствие (6), $A^-_\alpha A_\alpha(A^*_{(2)}\Sigma^{-1}_{(2)}A_{(2)})^-A^-_\alpha A_\alpha\leqslant(A^*_\alpha\Sigma_\alpha{}^{-1}A_\alpha)^-$, $\alpha=i,\ j$ [3]. В свою очередь, например, i-тое неравенство в (6) следует из равенства

$$\begin{pmatrix}\Sigma_{ii} & \Sigma_{ij}\\ \Sigma_{ji} & \Sigma_{jj}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\Sigma^{-1}_{ii} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}DTD^* & -D\\ -D^* & T^{-1}\end{pmatrix}, \tag{7}$$

где $D=\Sigma^{-1}_{ii}\Sigma_{ij}T^{-1}$, $T=\Sigma_{jj}-\Sigma_{ji}\Sigma^{-1}_{ii}\Sigma_{ij}$, поскольку, как нетрудно убе-

---

* Качество модели $[A, \Sigma]$ по определению не ниже, чем $[\tilde{A}, \tilde{\Sigma}]$, если редукция к U возможна для $[A, \Sigma]$ всякий раз, когда она возможна для $[\tilde{A}, \tilde{\Sigma}]$, и при этом $h^{1/2}(A, \Sigma, U)\leqslant h^{1/2}(\tilde{A}, \Sigma, U)$ [1].

диться, второй оператор справа в (7) положительно определен.

Следствие. Если некоторая часть измерений (1) допускает редукцию к прибору U, то и измерение (2) допускает редукцию к U, причем с меньшей или такой же погрешностью.

Итак, учет дополнительных измерений не может увеличить погрешность редукции, в том числе и тогда, когда им сопутствует произвольно большая погрешность, а используемые при этом модели не имеют никакого отношения к действительности. Поэтому, не ответив на вопрос о состоятельности используемой модели, мы не можем решить, насколько хорошо редукция отражает свойства измеренного объекта, сколь бы ни была мала при этом погрешность редукции.

2°. Рассмотрим асимптотические свойства надежности модели $[A_{(n)}, \Sigma_{(n)}]$ при $n \to \infty$. Напомним, что в нашем случае для каждого значения $\xi_{(n)}$ надежность $\alpha_n(\xi_{(n)}) = \alpha(\xi_{(n)}, A_{(n)}, \Sigma_{(n)})$ модели $[A_{(n)}, \Sigma_{(n)}]$ определяется как вероятность того, что $\chi^2_{n,0} \geqslant t_n(\xi_{(n)})$, где $\chi^2_{n,0}$ — случайная величина, имеющая χ^2-распределение с n степенями свободы,

$$t_n(\xi_{(n)}) = \| Q_n \Sigma_{(n)}^{-1/2} \xi_{(n)} \|^2, \quad Q_n = I - \Sigma_{(n)}^{-1/2} A_{(n)} (\Sigma_{(n)}^{-1/2} A_{(n)})^- \tag{8}$$

и для упрощения обозначений считается, что n равно размерности пространства значений ортогонального проектора Q_n, $n = \dim \mathcal{R}^{\perp}(\Sigma_{(n)}^{-1/2} A_{(n)})$.

Вектор $\nu_{(n)}$, как и в работе [2], имеет невырожденное нормальное распределение $\mathcal{N}(0, \Sigma_{(n)})$.

Согласно определению надежность $\alpha_n(\xi_{(n)})$ модели $[A_{(n)}, \Sigma_{(n)}]$ — случайная величина, распределение которой определяется распределением $\xi_{(n)}$, причем если верно равенство (2), то при любом $f \in \mathcal{R}$ $\alpha_n(\xi_{(n)})$ имеет равномерное на $[0, 1]$ распределение. Если же на самом деле

$$\xi_{(n)} = \tilde{A}_{(n)} f + \nu_{(n)} \tag{9}$$

и $\tilde{A}_{(n)} f \overline{\in} \mathcal{R}(A_{(n)})$, то надежность $[A_{(n)}, \Sigma_{(n)}]$ распределена на $[0, 1]$ с плотностью вероятности, неограниченной в нуле, и принимает значения, преимущественно близкие к нулю. В работе [2] показано, что значения надежности тем более концентрируются около нуля, чем больше $\theta_n^2 = \|\tau_n\|^2$, где $\tau_n = Q_n \Sigma_{(n)}^{-1/2} (\tilde{A}_{(n)} - A_{(n)}) f = Q_n \Sigma_{(n)}^{-1/2} \tilde{A}_{(n)} f$ и $[A_{(n)}, \Sigma_{(n)}]$ — используемая модель схемы измерения (9). Грубо говоря, с увеличением θ_n^2 надежность модели $[A_{(n)}, \Sigma_{(n)}]$ падает.

Рассмотрим последовательность измерений (9) и «соответствующую» последовательность моделей $[A_{(n)}, \Sigma_{(n)}]$, $n = 1, 2, \ldots$ Согласно лемме 1 с увеличением n точность редукции не убывает, как бы ни была выбрана последовательность $\{[A_{(n)}, \Sigma_{(n)}]\}$. В то же время, как будет показано ниже, надежность $[A_{(n)}, \Sigma_{(n)}]$ может как возрастать, так и убывать, в зависимости от поведения $\|\tau_n\|^2/\sqrt{n}$ при $n \to \infty$.

Пусть $\gamma_n = Q_n \Sigma_{(n)}^{-1/2} \nu_{(n)}$, так что $Q_n \Sigma_{(n)}^{-1/2} \xi_{(n)} = \tau_n + \gamma_n$. Заметим, что $\gamma_n = Q_n \eta_{(n)}$, где $\eta_{(n)} = \Sigma_{(n)}^{-1/2} \nu_{(n)}$ — нормальный $\mathcal{N}(0, I)$ случайный вектор $\mathcal{R}_{(n)}$, а $\tau_n = 0$, если и только если $\tilde{A}_{(n)} f \in \mathcal{R}(A_{(n)})$, в частности если $\tilde{A}_{(n)} = A_{(n)}$, поскольку Q_n ортогонально проектирует на $\mathcal{R}^{\perp}(\Sigma_{(n)}^{-1/2} A_{(n)})$ [3]. Отсюда следует, что статистика $t_n(\xi_{(n)})$ (8) имеет нецентральное χ^2-распределение с n степенями свободы и параметром нецентральности $\theta_n^2 > 0$, если $\tau_n \neq 0$.

Для исследования надежности при $n \to \infty$ удобно привлечь следующий вариант центральной предельной теоремы [4].

Т е о р е м а 1. Пусть $\alpha_{1,n}, \alpha_{2,n}, \ldots, \alpha_{n,n}$, $n = 1, 2, \ldots,$ — последовательность серий независимых случайных величин и

$\beta_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_{i,n}$, причем $\mathbf{E}\alpha_{i,n}=0$, $\mathbf{E}\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_{i,n}^2=1$, $i=1, \ldots, n$, $n=1, 2, \ldots$, и для любого $\varepsilon>0$, $\sum\limits_{i=1}^{n}\mathbf{E}(\alpha_{i,n}^2 \| \alpha_{i,n}|>\varepsilon)\to 0$ при $n\to\infty$ (условие Линдеберга). Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}P(\beta_n<x)=\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-t^2/2}dt/\sqrt{2\pi}=\Phi(x)$ равномерно по x, $-\infty<$ $<x<\infty$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{-\infty<x<\infty}|P(\beta_n<x)-\Phi(x)|=0. \tag{10}$$

В теореме посредством $\mathbf{E}(\alpha_{i,n}^2||\alpha_{i,n}|>\varepsilon)$ обозначено математическое ожидание $\alpha_{i,n}^2$, вычисленное по множеству $|\alpha_{i,n}|>\varepsilon$, $P(\beta_n<x)$, — вероятность того, что $\beta_n<x$.

Выберем в $\mathscr{R}_{(n)}$ ортонормированный базис так, чтобы первые n базисных векторов образовали базис $\mathscr{R}^{\perp}(\Sigma_{(n)}^{-1/2}A_{(n)})$; пусть $\tau_{n,i}$, $\gamma_{n,i}$, $i=1,\ldots,n$ — первые n координат векторов τ_n, γ_n соответственно (остальные координаты, очевидно, равны нулю). Поскольку $\mathbf{E}(\tau_{n,i}+\gamma_{n,i})^2=$ $=1+\tau_{n,i}^2$, $\mathbf{D}(\tau_{n,i}+\gamma_{n,i})^2=2+4\tau_{n,i}^2$, $i=1, \ldots, n$, то, как нетрудно убедиться, последовательности $\alpha_{i,n}=((\tau_{n,i}+\gamma_{n,i})^2-(1+\tau_{n,i}^2))/\sqrt{2(n+2\theta_n^2)}$, $i=1, \ldots, n$, $n=1, 2, \ldots$ удовлетворяют условиям теоремы 1, если, например, $\sup\limits_{1\leqslant n<\infty}\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|\tau_{n,i}|<\infty$. В этом случае выполнено условие Линдеберга и $\beta_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_{i,n}=(t_n(\xi_{(n)})-n-\|\tau_n\|^2)/\sqrt{2(n+2\|\tau_n\|^2)}$ при $n\to\infty$ удовлетворяет соотношению (10).

Возвращаясь к исследованию асимптотики распределения надежности $\alpha_n(\xi_{(n)})$ при $n\to\infty$, заметим прежде всего, что, согласно условию (10), $\sup\limits_{-\infty<s<\infty}\left|P\left(\frac{\chi_{n,0}^2-n}{\sqrt{2n}}\geqslant s\right)-(1-\Phi(s))\right|\to 0$ при $n\to\infty$, и, следовательно, найдется n_0 такое, что для всякого $n\geqslant n_0$ $|x-(1-\Phi(s(n, x)))|\leqslant\varepsilon$ при любом $x=P\left(\frac{\chi_{n,0}^2-n}{\sqrt{2n}}\geqslant\frac{t_n(x)-n}{\sqrt{2n}}\equiv s(n, x)\right)\in(0, 1)$. Отсюда следует, что для любого $x\in(0,1)$ $s(x)-\delta(x, \varepsilon)\leqslant s(n, x)\leqslant$ $\leqslant s(x)+\delta(x, \varepsilon)$, где $\delta(x, \varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$, если $x=1-\Phi(s(x))$. Воспользовавшись распределением надежности $\alpha_n(\xi_{(n)})$, приведенным в работе [2], найдем $P(\alpha_n(\xi_{(n)})\geqslant x)=P(t_n(\xi_n)\leqslant t_n(x))=P\left(\frac{t_n(\xi_n)-n-\theta_n^2}{\sqrt{2(n+2\theta_n^2)}}\leqslant\right.$ $\left.\leqslant\frac{t_n(x)-n-\theta_n^2}{\sqrt{2(n+2\theta_n^2)}}\right)$, где, как и выше, $P(\chi_{n,0}^2\geqslant t_n(x))=x$. Из теоремы 1 следует, что для всякого $\varepsilon_1>0$ найдется n_1 такое, что для любого $n\geqslant n_1$ $\sup\limits_{-\infty<r<\infty}|P(r_n(\xi_{(n)})<r)-\Phi(r)|\leqslant\varepsilon_1$, где $r_n(x)=(t_n(x)-n-\theta_n^2)\times$ $\times(2(n+2\theta_n^2))^{-1/2}=(s(n, x)\sqrt{2n}-\|\tau_n\|^2)(2(n+2\|\tau_n\|^2))^{-1/2}$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}P(\alpha_n(\xi_{(n)})\geqslant x)=\lim\limits_{n\to\infty}\Phi(r_n(x))$, $0<x<1$.

Теперь, основываясь на полученных результатах, мы можем ответить на поставленный вопрос о поведении $\alpha_n(\xi_{(n)})$ при $n\to\infty$.

Теорема 2. При $n\to\infty$ 1) $\alpha_n(\xi_{(n)})$ сходится по вероятности к нулю тогда и только тогда, когда $\|\tau_n\|^2/\sqrt{n}\to\infty$; 2) распределение

$\alpha_n(\xi_{(n)})$ сходится к равномерному распределению на $[0, 1]$ тогда и только тогда, когда $\|\tau_n\|^2/\sqrt{n} \to 0$.

Доказательство. 1) Если при $n\to\infty$ $\|\tau_n\|^2/\sqrt{n}\to\infty$, то $r_n(x)\to-\infty$, ибо $s(n, x)\to s(x)$. Наоборот, если при $n\to\infty$ $r_n(x)\to-\infty$, то $\|\tau_n\|^2/\sqrt{n}\to\infty$. В этом случае для любого $x>0$ $\lim\limits_{n\to\infty} P(\alpha_n(\xi_{(n)})\geqslant x)=\lim\limits_{n\to\infty}\Phi(r_n(x))=0$. 2) При $n\to\infty$ $r_n(x)\to s(x)$, если и только если $\|\tau_n\|^2/\sqrt{n}\to 0$. В этом случае $\lim\limits_{n\to\infty} P(\alpha_n(\xi_{(n)})>x)=\Phi(s(x))=1-x$, $0<x<1$. ▲

Таким образом, если измерения сопровождаются значительными ошибками в моделях, так что $\|\tau_n\|^2/\sqrt{n}\to\infty$ при $n\to\infty$, то при достаточно большом n модель $[A_{(n)}, \Sigma_{(n)}]$ будет несостоятельной. Если же ошибки в моделях измерений (1) незначительны, так что при $n\to\infty$ $\|\tau_n\|^2/\sqrt{n}\to 0$, то при большом n надежность будет близка к надежности точной модели.

Характерно, что в конечном счете надежность модели $[A_{(n)}, \Sigma_{(n)}]$ определяется не погрешностью $\delta_n=(\tilde{A}_{(n)}-A_{(n)})f$, вызванной отличием в операторах $\tilde{A}_{(n)}$ и $A_{(n)}$, а величиной проекции на $\mathcal{R}^{\perp}(\Sigma_{(n)}^{-1/2}A_{(n)})$ вектора $\Sigma_{(n)}^{-1/2}\delta_n$, в котором погрешность δ_n, грубо говоря, отнесена к интенсивности шума $\nu_{(n)}$. Иначе говоря, чем меньше уровень шума $\nu_{(n)}$, тем сильнее влияет на надежность модели $[A_{(n)}, \Sigma_{(n)}]$ ошибка в операторе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Пытьев Ю. П.//Матем. сб. 1983. **120(162)**, № 2. С. 240—272. [2] Пытьев Ю. П.//Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон. 1986. 27, № 3. С. 14—19. [3] Пытьев Ю. П.//Матем. сб. 1982. **118(160)**, № 1(5). С. 19—49. [4] Леман Э. Проверка статистических гипотез. М., 1979.

Поступила в редакцию
25.06.85

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1986. Т. 27, № 5

УДК 517.958:[535+537.812]

О ЧИСЛЕННО-АСИМПТОТИЧЕСКОМ МЕТОДЕ РАСЧЕТА ЭКРАНИРОВАННОЙ МАГНИТНОЙ СИСТЕМЫ

В. Б. Гласко, Н. И. Ольховская

(кафедра математики)

Расчет экранированных магнитных систем в точной математической постановке задачи может быть связан с большими затратами машинного времени. Поэтому представляет интерес разработка асимптотических методов расчета возмущений магнитного поля, вызванных наличием экрана, что возможно в случае, если последний обладает достаточно высокой электромагнитной проницаемостью.

В настоящей работе такой метод разрабатывается для электромагнитной системы ЯМР-томографа [1] в рамках некоторой математической модели.

1. Рассмотрим аксиально-симметричную систему, состоящую из рабочей области G с расположенными в ней источниками поля и окружающего ее замкнутого экрана D произвольной формы с внутренней границей Γ и внешней границей γ. Область D заполнена магнетиком,