$\alpha_n(\xi_{(n)})$ сходится к равномерному распределению на $[0, 1]$ тогда и только тогда, когда $\|\tau_n\|^2/\sqrt{n}\to 0$.

Доказательство. 1) Если при $n\to\infty$ $\|\tau_n\|^2/\sqrt{n}\to\infty$, то $r_n(x)\to-\infty$, ибо $s(n, x)\to s(x)$. Наоборот, если при $n\to\infty$ $r_n(x)\to-\infty$, то $\|\tau_n\|^2/\sqrt{n}\to\infty$. В этом случае для любого $x>0$ $\lim\limits_{n\to\infty} P(\alpha_n(\xi_{(n)})\geqslant x)=\lim\limits_{n\to\infty}\Phi(r_n(x))=0$. 2) При $n\to\infty$ $r_n(x)\to s(x)$, если и только если $\|\tau_n\|^2/\sqrt{n}\to 0$. В этом случае $\lim\limits_{n\to\infty} P(\alpha_n(\xi_{(n)})>x)=\Phi(s(x))=1-x$, $0<x<1$. ▲

Таким образом, если измерения сопровождаются значительными ошибками в моделях, так что $\|\tau_n\|^2/\sqrt{n}\to\infty$ при $n\to\infty$, то при достаточно большом n модель $[A_{(n)}, \Sigma_{(n)}]$ будет несостоятельной. Если же ошибки в моделях измерений (1) незначительны, так что при $n\to\infty$ $\|\tau_n\|^2/\sqrt{n}\to 0$, то при большом n надежность будет близка к надежности точной модели.

Характерно, что в конечном счете надежность модели $[A_{(n)}, \Sigma_{(n)}]$ определяется не погрешностью $\delta_n=(\tilde{A}_{(n)}-A_{(n)})f$, вызванной отличием в операторах $\tilde{A}_{(n)}$ и $A_{(n)}$, а величиной проекции на $\mathcal{R}^{\perp}(\Sigma_{(n)}^{-1/2}A_{(n)})$ вектора $\Sigma_{(n)}^{-1/2}\delta_n$, в котором погрешность δ_n, грубо говоря, отнесена к интенсивности шума $\nu_{(n)}$. Иначе говоря, чем меньше уровень шума $\nu_{(n)}$, тем сильнее влияет на надежность модели $[A_{(n)}, \Sigma_{(n)}]$ ошибка в операторе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Пытьев Ю. П.//Матем. сб. 1983. **120(162)**, № 2. С. 240—272. [2] Пытьев Ю. П.//Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон. 1986. 27, № 3. С. 14—19. [3] Пытьев Ю. П.//Матем. сб. 1982. **118(160)**, № 1(5). С. 19—49. [4] Леман Э. Проверка статистических гипотез. М., 1979.

Поступила в редакцию
25.06.85

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1986. Т. 27, № 5

УДК 517.958:[535+537.812]

О ЧИСЛЕННО-АСИМПТОТИЧЕСКОМ МЕТОДЕ РАСЧЕТА ЭКРАНИРОВАННОЙ МАГНИТНОЙ СИСТЕМЫ

В. Б. Гласко, Н. И. Ольховская

(кафедра математики)

Расчет экранированных магнитных систем в точной математической постановке задачи может быть связан с большими затратами машинного времени. Поэтому представляет интерес разработка асимптотических методов расчета возмущений магнитного поля, вызванных наличием экрана, что возможно в случае, если последний обладает достаточно высокой электромагнитной проницаемостью.

В настоящей работе такой метод разрабатывается для электромагнитной системы ЯМР-томографа [1] в рамках некоторой математической модели.

1. Рассмотрим аксиально-симметричную систему, состоящую из рабочей области G с расположенными в ней источниками поля и окружающего ее замкнутого экрана D произвольной формы с внутренней границей Γ и внешней границей γ. Область D заполнена магнетиком,

магнитная проницаемость которого $\mu_2^0=\text{const}$. Тогда для Z-компоненты h_z возмущенного поля $\mathbf{h}=\{h_r,\ 0,\ h_z\}$ в G и аналогично для $H_z(M)$ в D получим задачу:

$$\begin{cases} \Delta h_z = 0 \quad \text{в } G, \\ \Delta H_z = 0 \quad \text{в } D, \\ (h_z + H_{0z})|_\Gamma = H_z|_\Gamma, \\ \dfrac{\mu_1}{\mu_2^0}\left(\dfrac{\partial h_z}{\partial n} + \dfrac{\partial H_{0z}}{\partial n}\right)\Big|_\Gamma = \dfrac{\partial H_z}{\partial n}\Big|_\Gamma, \\ \qquad H_z|_\gamma = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $H_{0z}(M)$ соответствует полю источников в отсутствие экрана и является известной функцией [2], $\mu_1=\text{const}$ — магнитная проницаемость воздуха в G, нормаль $\mathbf{n}$ — внешняя к области G.

При большом, но конечном μ_2^0 введем малый параметр $\varepsilon = \mu_1/\mu_2^0 > 0$. Решение задачи (1) представим в виде

$$h_z = h_z^0 + \varepsilon \widetilde{h}_z + \delta, \quad H_z = \varepsilon \widetilde{H}_z + \eta, \tag{2}$$

где $\delta(M)$, $\eta(M)$ — остаточные члены. Из (1), (2) получим

$$\begin{cases} \Delta\delta = 0 \quad \text{в } G, \\ \Delta\eta = 0 \quad \text{в } D, \end{cases} \tag{3}$$

$$\delta|_\Gamma = \eta|_\Gamma, \tag{4}$$

$$\varepsilon \frac{\partial \delta}{\partial n}\Big|_\Gamma + \varepsilon^2 f|_\Gamma = \frac{\partial \eta}{\partial n}\Big|_\Gamma, \tag{5}$$

$$\eta|_\gamma = 0, \tag{6}$$

где $f(M)|_\Gamma = \dfrac{\partial H_{0z}}{\partial n}\Big|_\Gamma$.

Перейдем к обоснованию асимптотики (2).

Лемма. Решение однородных уравнений (3) с условиями (4)—(6) $\mathcal{F}(M) = \begin{cases} \delta(M) \text{ в } G, \\ \eta(M) \text{ в } D \end{cases}$ достигает своего экстремума на внешней границе γ.

Действительно, функция $\mathcal{F}(M)$, как гармоническая в G и D, не может достигать экстремума внутри этих областей. Пусть теперь в некоторой точке $A \in \Gamma$ $\mathcal{F}(M)$ достигает максимального значения. Применяя принцип Заремба—Жиро [3] к области D, а затем к области G, получаем

$$\frac{\partial \eta}{\partial n}\Big|_{A+0} < 0, \quad \frac{\partial \delta}{\partial n}\Big|_{A-0} > 0. \tag{7}$$

Это противоречит однородному условию, соответствующему (5), так как $\varepsilon > 0$. В случае достижения функцией $\mathcal{F}(M)$ минимума доказательство аналогично.

Следствие. Однородная задача, соответствующая задаче (3)—(6), имеет лишь тривиальное решение.

Теорема 1. Решение задачи (3) существует и единственно.

Будем искать решение задачи (3) в виде суммы потенциалов двойного и простого слоев в области D и потенциала двойного слоя в области G [4]:

$$\mathcal{F}(M) = \begin{cases} \eta(M) = \int\limits_\gamma \Omega_\xi(M,\ P_\gamma)\cdot\nu_0(P_\gamma)\, ds_{P_\gamma} + \int\limits_\Gamma \Omega(M,\ P_\Gamma)\cdot\nu_1(P_\Gamma)\, ds_{P_\Gamma}, \\ \delta(M) = \int\limits_\Gamma \widetilde{\Omega}_\xi(M,\ P_\Gamma)\cdot\nu_2(P_\Gamma)\, ds_{P_\Gamma}, \end{cases} \tag{8}$$

где $\Omega(M, P_\Gamma)$, $\Omega_\xi(M, P_\gamma)$, $\widetilde{\Omega}_\xi(M, P_\Gamma)$ — фундаментальные решения уравнения Лапласа [4], $\nu_0(P)$, $\nu_1(P)$, $\nu_2(P)$ — соответствующие плотности. Подставляя (8) в (4)—(6) и учитывая условия скачка потенциала двойного слоя и нормальной производной потенциала простого слоя [4], получим неоднородную систему линейных интегральных уравнений Фредгольма второго рода:

$$\begin{cases} \int\limits_\Gamma \widetilde{\Omega}_\xi(M_\Gamma, P_\Gamma)\cdot\nu_2(P_\Gamma)\,ds_{P_\Gamma} + \pi\nu_2(M_\Gamma) = \int\limits_\gamma \Omega_\xi(M_\Gamma, P_\gamma)\cdot\nu_0(P_\gamma)\,ds_{P_\gamma} + \\ \qquad\qquad + \int\limits_\Gamma \Omega(M_\Gamma, P_\Gamma)\cdot\nu_1(P_\Gamma)\,ds_{P_\Gamma}, & (9) \\ \varepsilon\int\limits_\Gamma \frac{\partial}{\partial n}\widetilde{\Omega}_\xi(M_\Gamma, P_\Gamma)\cdot\nu_2(P_\Gamma)\,ds_{P_\Gamma} + \varepsilon^2 f(M_\Gamma) = \\ = \int\limits_\gamma \frac{\partial}{\partial n}\Omega_\xi(M_\Gamma, P_\gamma)\cdot\nu_0(P_\gamma)\,ds_{P_\gamma} + \int\limits_\Gamma \frac{\partial}{\partial n}\Omega(M_\Gamma, P_\Gamma)\cdot\nu_1(P_\Gamma)\,ds_{P_\Gamma} + \\ \qquad\qquad + \pi\nu_1(M_\Gamma), & (10) \\ \int\limits_\gamma \Omega_\xi(M_\gamma, P_\gamma)\cdot\nu_0(P_\gamma)\,ds_{P_\gamma} + \pi\nu_0(M_\gamma) + \int\limits_\Gamma \Omega(M_\gamma, P_\Gamma)\,\nu_1(P_\Gamma)\,ds_{P_\Gamma} = 0. & (11) \end{cases}$$

Однородная система уравнений, соответствующая (9)—(11), имеет лишь тривиальное решение, так как эквивалентна однородной задаче, соответствующей (3). Отсюда, по теореме Фредгольма об интегральных уравнениях второго рода с полярными ядрами [5, 6], следует существование и единственность решения системы (9)—(11), а значит, задачи (3)—(6).

Теорема 2. Решение задачи (3) имеет оценку $\delta(M)=o(\varepsilon^2)$, $\eta(M)=o(\varepsilon^2)$.

В самом деле, разрешив (9) и (11) относительно $\nu_2(P)$ и $\nu_0(P)$ соответственно и подставив полученные выражения в (10), получим для ν_1 интегральное уравнение второго рода с полярным ядром:

$$\nu_1(M) = \int\limits_\Gamma (A_2(M, P_\Gamma) + \varepsilon A_1(M, P_\Gamma))\cdot\nu_1(P_\Gamma)\,ds_{P_\Gamma} + \varepsilon^2 f(M), \qquad (12)$$

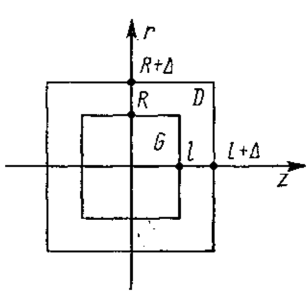
где $A_1(M, P_\Gamma)$ и $A_2(M, P_\gamma)$ линейно выражаются через ядра исходной системы (9)—(11). Решение уравнения (12) имеет вид [5]:

$$\nu_1(M) = \varepsilon^2\left(f(M) + \int\limits_\Gamma R_1(M, P_\Gamma)\cdot f(P_\Gamma)\,ds_{P_\Gamma}\right), \qquad (13)$$

где $R_1(M, P_\Gamma)$ — резольвента уравнения (12). Согласно [6], для любой $f(M): |f|\leqslant C$, интеграл в скобках также ограничен по модулю. Отсюда $|\nu_1|\leqslant\varepsilon^2 C_1$ и, следовательно, $|\nu_0|\leqslant\varepsilon^2 C_0$, $|\nu_2|\leqslant\varepsilon^2 C_2$. Тогда, согласно [6], справедливы требуемые оценки для $\delta(M)$ и $\eta(M)$.

Следствие. Из теорем 1 и 2 следует справедливость представления (2).

2. Рассмотрим возможный алгоритм расчета поля, основанный на представлении (2). Для численного эксперимента была выбрана система с экраном цилиндрической формы (рисунок). В цилиндрической системе координат задача (1) имеет вид



$$
\begin{cases}
\Delta h_z = 0 \quad \text{в} \quad G, \\
\Delta H_z = 0 \quad \text{в} \quad D, \\
(h_z + H_{0z})|_{r=R} = H_z|_{r=R}, \quad 0 < z < l, \\
\dfrac{\mu_1}{\mu_2^0}\left(\dfrac{\partial h_z}{\partial r} + \dfrac{\partial H_{0z}}{\partial r}\right)\Big|_{r=R} = \dfrac{\partial H_z}{\partial r}\Big|_{r=R}, \quad 0 < z < l, \\
\dfrac{\mu_1}{\mu_2^0}(h_z + H_{0z})|_{z=l} = H_z|_{z=l}, \quad 0 < r < R, \\
\left(\dfrac{\partial h_z}{\partial z} + \dfrac{\partial H_{0z}}{\partial z}\right)\Big|_{z=l} = \dfrac{\partial H_z}{\partial z}\Big|_{z=l}, \quad 0 < r < R, \\
H_z|_{r=R+\Delta} = 0, \quad 0 < z < l+\Delta; \ H_z|_{z=l+\Delta} = 0, \quad 0 < r < R+\Delta; \\
\dfrac{\partial h_z}{\partial r}\Big|_{r=0} = 0, \quad 0 < z < l; \quad \dfrac{\partial h_z}{\partial z}\Big|_{z=0} = 0, \quad 0 < r < R; \\
\dfrac{\partial H_z}{\partial r}\Big|_{r=0} = 0, \quad l < z < l+\Delta; \ \dfrac{\partial H_z}{\partial z}\Big|_{z=0} = 0, \quad R < r < R+\Delta.
\end{cases} \tag{14}
$$

Заметим, что R-компонента поля выражается через Z-компоненту как

$$
h_r(r, z) = -\frac{1}{r}\int_0^r \rho \frac{\partial h_z}{\partial z}(\rho, z)\, d\rho; \ H_r(r, z) = \frac{1}{r}\int_r^{R+\Delta} \rho \frac{\partial H_z}{\partial z}(\rho, z)\, d\rho.
$$

Подставив (2) в (14), получим для нахождения членов асимптотики (2) три отдельные задачи, которые решаются последовательно:

$$
\begin{cases}
\Delta h_z^0 = 0 \quad \text{в} \quad G, \\
h_z^0|_{r=R} = -H_{0z}|_{r=R}, \\
\dfrac{\partial h_z^0}{\partial z}\Big|_{z=l} = -\dfrac{\partial H_{0z}}{\partial z}\Big|_{z=l}, \\
\dfrac{\partial h_z^0}{\partial r}\Big|_{r=0} = 0, \quad \dfrac{\partial h_z^0}{\partial z}\Big|_{z=0} = 0,
\end{cases} \tag{15}
$$

$$
\begin{cases}
\Delta \widetilde{H}_z = 0 \quad \text{в} \quad D, \\
\dfrac{\partial \widetilde{H}_z}{\partial r}\Big|_{r=R} = \left(\dfrac{\partial h_z^0}{\partial r} + \dfrac{\partial H_{0z}}{\partial r}\right)\Big|_{r=R}, \\
\dfrac{\partial \widetilde{H}_z}{\partial z}\Big|_{z=0} = 0; \quad \dfrac{\partial \widetilde{H}_z}{\partial r}\Big|_{r=0} = 0, \\
\widetilde{H}_z|_{z=l} = (h_z^0 + H_{0z})|_{z=l}, \\
\widetilde{H}_z|_{r=R+\Delta} = 0; \quad \widetilde{H}_z|_{z=l+\Delta} = 0.
\end{cases} \tag{16}
$$

$$
\begin{cases}
\Delta \widetilde{h}_z = 0 \quad \text{в} \quad G, \\
\widetilde{h}_z|_{r=R} = \widetilde{H}_z|_{r=R}, \\
\dfrac{\partial \widetilde{h}_z}{\partial z}\Big|_{z=l} = \dfrac{\partial \widetilde{H}_z}{\partial z}\Big|_{z=l}, \\
\dfrac{\partial \widetilde{h}_z}{\partial r}\Big|_{r=0} = 0; \quad \dfrac{\partial \widetilde{h}_z}{\partial z}\Big|_{z=0} = 0.
\end{cases} \tag{17}
$$

Решение задач (15), (17) получено аналитически методом разделения переменных. Например, для задачи (15) оно имеет вид

$$h_z^0(r,\ z)=\frac{f_{z_0}}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{f_{z_n}\frac{I_0(\pi nr/l)}{I_0(\pi nR/l)}\cos\frac{\pi nz}{l}+\right.$$

$$\left.+Rg_{z_n}\frac{\operatorname{ch}(\mu_n^0 z/R)}{\mu_n^0\operatorname{sh}(\mu_n^0 l/R)}J_0\left(\mu_n^0\frac{r}{R}\right)\right\}, \qquad (18)$$

где

$$J_0(\mu_n^0)=0,\ f_{z_n}=-\frac{2}{l}\int_0^l H_{0z}(R,\ z)\cos\frac{\pi nz}{l}\,dz,$$

$$g_{z_n}=-\frac{2}{[RJ_1(\mu_n^0)]^2}\int_0^R r\frac{\partial H_{0z}}{\partial z}(r,\ l)\,J_0\left(\mu_n^0\frac{r}{R}\right)dr.$$

Задача (16) также может быть решена аналитически, однако ввиду сложности представления решения в данной области решалась с помощью разностной аппроксимации.

При численном эксперименте источники поля моделировались двумя парами симметрично относительно оси r расположенных тонких витков с постоянным током. В серии проведенных расчетов толщина экрана составляла от 5 до 17% от линейных размеров G, токи в витках выбирались порядка 10^{-1} А. Отношение магнитных проницаемостей в рабочей области и экране $\varepsilon=10^{-4}$.

Разностная задача, соответствующая (16), решалась методом верхней блочной релаксации по строкам [7]. При этом сетка размером 131×11 выбиралась равномерной по обеим координатам. При суммировании рядов для задач (15), (17) бралось 15 членов суммы. Это обеспечивает точность расчета $\sim 10^{-6}$—10^{-7}. Получены следующие порядки коэффициентов при степенях ε в асимптотике (2):

$$h_z^0(z,\ r)\sim 10^{-1}\ \text{А/м},\ \bar{H}_z(z,\ r)\sim 10^{-2}\ \text{А/м},\ \bar{h}_z(z,\ r)\sim 1\ \text{А/м}.$$

Таким образом, уже второй член в асимптотической формуле (2) для отраженного поля h_z составляет лишь 0,1% от первого члена, а поле в экране H_z составляет 0,001% от полного поля $\mathscr{H}_z(M)=H_{0z}(M)+$ $+h_z(M)$ в рабочей области.

Полученные оценки подтверждают эффективность алгоритма расчета магнитных полей в экранированных системах, основанного на асимптотических представлениях.

В заключение авторы выражают благодарность А. Н. Тихонову и А. Г. Свешникову за внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Ацаркин В. А., Скроцкий Г. В., Сороко Л. Н., Федин Э. И. // УФН. 1981. 135, № 2. С. 285—316. [2] Тамм И. Е. Основы теории электричества. М., 1976. [3] Бицадзе А. В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М., 1966. [4] Арсенин В. Я. Методы математической физики и специальные функции. М., 1984. [5] Бицадзе А. В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М., 1981. [6] Смирнов В. И. Курс высшей математики. Л., 1951. Т. 4. [7] Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М., 1978.

Поступила в редакцию
08.07.85