ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1986. Т. 27, № 5

РАДИОФИЗИКА

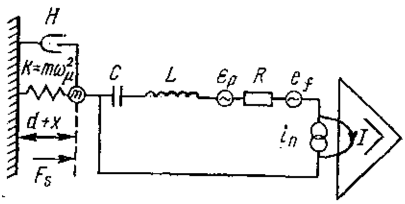
УДК 53:51; 538.56:530.145

ФИЛЬТРАЦИЯ СИГНАЛА В ЭКСПЕРИМЕНТАХ С ПРОБНЫМИ ТЕЛАМИ В УСЛОВИЯХ МАЛОЙ АПРИОРНОЙ ИНФОРМАЦИИ

А. В. Гусев, В. Н. Руденко

(кафедра физики колебаний)

§ 1. **Введение.** Задачи фильтрации сигнала из шума типичны для техники связи и радиолокации. В последнее время подобные задачи возникают также в ряде тонких физических экспериментов, связанных с измерением малых сил [1—3]. При этом априори известны структура и параметры экспериментальной установки, но почти полностью отсутствует информация о принимаемом сигнале. Целью данной работы является расчет среднеквадратичной ошибки при восстановлении сигнала в условиях малой априорной информации о классе возможных внешних воздействий $\{F_s(t)\}:\ \sup\limits_{-\infty<t<\infty} |\dot F_s(t)| = \dot F_0$ с использованием известных алгоритмов решения обратных задач [4, 5].



Измерение слабых возмущений пробного осциллятора осуществляется с помощью различных конструкций электромеханических преобразователей [1, 2], среди которых наиболее перспективны параметрические устройства на нелинейном реактивном элементе [3]. Эквивалентная схема такого датчика приведена на рисунке. Сигнал с контура поступает на предусилитель с коэффициентом усиления по мощности $G \gg 1$, затем демодулируется и подается на блок системы обработки, передаточная функция которой выбирается с учетом рекомендации теории [4, 5]. Точность восстановления полезного сигнала ограничена тепловыми флуктуациями сопротивления R контура и нетермодинамическими шумами предусилителя $(e_n,\ i_n)$ с заданной минимальной шумовой температурой $(T_n)_{\min} = (2\pi/\varkappa)[<|e_n(j\omega_p)|^2>\cdot<|i_n(j\omega_p)|^2>]^{1/2}$, где $\varkappa$ — постоянная Больцмана, ω_p — частота накачки.

Решение прямой задачи $I(t) = (I_0 + \tilde I_a(t))\cos(\omega_p t + \vartheta(t))$ в наиболее перспективном режиме динамического демпфирования в стандартных обозначениях [3] дает

$$[\tilde I_a(j\omega)]_s = (\omega_p/2)^2 a_0 \omega_\mu^2 \Delta\, [\det(j\omega)]^{-1} f_s(j\omega),$$

$$\langle |\tilde I_a(j\omega)|^2 \rangle_f = (\omega_\mu^2 - \omega^2)^2 (\delta_e^2 + \omega^2 + \Delta^2)(\omega_p/2\rho)^2 \cdot 2N_f |\det(j\omega)|^{-2} + 2N_i, \quad (1)$$

где

$$\det(j\omega) = (\omega_\mu^2 - \omega^2)(\delta_e^2 + \Delta^2 - \omega^2 + 2\delta_e \omega j) - \lambda a_0^2 (\omega_p/2)\, \omega_\mu^2 \Delta,$$

$$N_f = \langle |e_R\ (j\omega_p)|^2 \rangle + \langle |e_n(j\omega_p)|^2 \rangle, \quad N_i = \langle |i_n(j\omega_p)|^2 \rangle.$$

§ 2. **Восстановление полезного сигнала методом регуляризации.** Для решения обратной задачи, т. е. для реконструкции полезного сигнала $F_s = Kdf_s$ по отклику электромеханического преобразователя $\tilde I_a(t)$ в условиях малой априорной информации: $\sup\limits_{-\infty<t<\infty} |\dot F_s(t)| = \dot F_0$

целесообразно использовать метод статистической регуляризации [4, 5].

Максимально правдоподобная оценка полезного сигнала при отсутствии априорной информации соответствует инверсной фильтрации и дается следующей формулой [6]:

$$\hat{f}_s(t) = f_s(t) + n(t), \tag{2}$$

где $n(t)$ — гауссовский шум с энергетическим спектром

$$\langle |n(j\omega)|^2 \rangle = \frac{2}{\left(\left(\frac{\omega_p}{2}\right)^2 a_0^2\omega_\mu^2\Delta\right)^2}\left[(\omega_\mu^2-\omega^2)^2(\delta_e^2+\omega^2+\Delta^2)\left(\frac{\omega_p}{2p}\right)^2 N_f + \right.$$

$$\left. + |\det(j\omega)|^2 N_i\right]. \tag{3}$$

Дисперсия оценки (2) в силу (3) оказывается недопустимо большой, и необходимо сглаживание высокочастотных составляющих помехи с учетом априорной информации об ожидаемом сигнале. Простейшим стабилизирующим фильтром (СФ), передаточная функция которого удовлетворяет требованиям теории [4, 5], является гауссовский фильтр

$$K_{\text{СФ}}(j\omega,\ \alpha) = \exp\left\{-\frac{\alpha^2\omega^2}{2}\right\}, \tag{4}$$

где α — параметр регуляризации. Из (2), (4) находим среднеквадратичную ошибку при реконструкции сигнала для выбранного СФ:

$$\varepsilon_f^2(t,\ \alpha) = \left\langle\left[f_s(t) - \int_{-\infty}^{\infty} H_{\text{СФ}}(\tau,\ \alpha)\hat{f}_s(t-\tau)\,d\tau\right]^2\right\rangle = \Delta_s^2(t,\ \alpha) + \sigma^2(\alpha). \tag{5}$$

Здесь

$$\Delta_s^2(t,\ \alpha) = \left[f_s(t) - \int_{-\infty}^{\infty} H_{\text{СФ}}(\tau,\ \alpha) f_s(t-\tau)\,d\tau\right]^2,$$

$$\sigma^2(\alpha) = \left\langle\left[\int_{-\infty}^{\infty} H_{\text{СФ}}(\tau,\ \alpha)\, n(t-\tau)\,d\tau\right]^2\right\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} K_{\text{СФ}}^2(\omega)\langle |n(j\omega)|^2\rangle\,d\omega,$$

$$H_{\text{СФ}}(\tau,\ \alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K_{\text{СФ}}(j\omega,\ \alpha)\, e^{j\omega\tau}\,d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{\tau^2}{2\alpha^2}\right\}. \tag{6}$$

Для расчета наибольшей величины динамической ошибки $|\Delta_s(t,\ \alpha)|$ при априорной информации $|\dot{F}_s| \leqslant \dot{F}_0$ используем разложение $f_s(t-\tau)$ в степенной ряд с остаточным членом в форме Лагранжа $f_s(t-\tau) = f_s(t) - \tau\dot{f}_s(t-\mu\tau)$, $0<\mu<1$. Тогда

$$|\Delta_s(t,\ \alpha)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} H_{\text{СФ}}(\tau,\ \alpha)\,\tau\dot{f}_s(t-\mu\tau)\,d\tau\right| \leqslant 2\sup_{-\infty<t<\infty}|\dot{f}_s(t)| \times$$

$$\times \int_0^{\infty}\tau H_{\text{СФ}}(\tau,\ \alpha)\,d\tau = \frac{2}{\pi}\,\alpha\,(\dot{F}_v/(m\omega_\mu^2 d)). \tag{7}$$

Расчет дисперсии оценки $\sigma^2(\alpha)$ в режиме минимальных шумов [7] (оптимизация по входным шумам предусилителя при заданной средней мощности $\varkappa(T_n)_{\min}\Delta f$) дает $(a_0\to\infty)$

$$[\sigma^2(\alpha)]_{\text{opt}} \approx \left(\frac{1+(\delta_e/\Delta)^2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{\varkappa(T_n)_{\min}}{m\omega_\mu^2 d^2} (\alpha\omega_p)^{-1} \left[\sum_{k=0}^{3} \frac{C_k}{2^k(\alpha\omega_\mu)^{2k}}\right]^{1/2}, \tag{8}$$

где

$$C_0 = 1,\ C_1 = -\frac{2(\delta_e^2+\Delta^2)-\omega_\mu^2}{\delta_e^2+\Delta^2},\ C_2 = \frac{3(\delta_e^2+\Delta^2-2\omega_\mu^2)}{\delta_e^2+\Delta^2},\ C_3 = -\frac{15}{\delta_e^2+\Delta^2}.$$

Подстановка (7), (8) в (5) с последующей минимизацией рассеяния оценки по α [4, 5] позволяет определить минимальное значение среднеквадратичной ошибки при реконструкции полезного сигнала для выбранного СФ:

$$(\varepsilon_F^2)_{\min\max} = \frac{4}{\pi}(\dot{F}_0\eta_0\omega_\mu^{-1})^2, \tag{9}$$

где η_0 — корень уравнения

$$\frac{1}{\eta^3}\left[\sum_{k=0}^{3}\frac{C_k}{2^k\eta^{2k}}\right]^{1/2} = \left(\frac{4}{\pi(1+(\delta_e/\Delta)^2)}\right)^{1/2} \frac{\dot{F}_0}{m\varkappa(T_n)_{\min}(\omega_\mu/\omega_p)\,\omega_\mu^4}. \tag{10}$$

В общем случае уравнение (10) может быть решено численными методами. Аналитические результаты можно получить для двух предельных ситуаций.

1. *Сильные шумы.*

Из (9), (10) при $(T_n)_{\min}\to\infty$ находим

$$(\varepsilon_F^2)^{(1)}_{\min\max} \approx \frac{4}{\pi}\left[m\varkappa(T_n)_{\min}(\omega_\mu/\omega_p)\dot{F}_0\omega_\mu\left(\frac{\pi(1+\delta_e^2/\Delta^2)}{4}\right)^{1/2}\right]^{1/3}. \tag{11}$$

2. *Слабые шумы.*

Полагаем в (9), (10) $(T_n)_{\min}\to 0$. Это дает

$$(\varepsilon_F^2)^{(2)}_{\min\max} \approx \frac{4}{\pi}\left[\left(\frac{\pi(1+\delta_e^2/\Delta^2)}{4}\right)^{1/2} m\varkappa(T_n)_{\min}\frac{\dot{F}_0^4}{\omega_p(\Delta^2+\delta_e^2)}\right]^{1/3}. \tag{12}$$

§ 3. **Влияние априорной информации. Выводы.** Уменьшить ошибку при восстановлении полезного сигнала по сравнению с теми, что даются формулами (11), (12), можно, привлекая дополнительную информацию о характере ожидаемого сигнала. В частности, при высокой добротности механической цепи целесообразно ограничить класс возможных сигналов $\{F_s(t)\}$ узкополосными сигналами вида

$$F_s(t) = A_c(t)\cos\omega_\mu t - A_s(t)\sin\omega_\mu t,\quad |\dot{A}_{c,s}/A_{c,s}| \ll \omega_\mu. \tag{13}$$

Априорная информация о свойствах неизвестных функций $A_{c,s}(t)$ по-прежнему минимальна: $\sup\limits_{-\infty<t<\infty}|\dot{A}_{c,s}(t)| = \dot{A}_0$.

Естественным обобщением (4) при реконструкции узкополосного сигнала (13), спектральная плотность которого сосредоточена (при $\omega>0$) вблизи частоты ω_μ, является СФ с передаточной функцией

$$K_{\text{СФ}}^{(A)}(j\omega,\ \alpha) = \exp\left\{-\frac{\alpha^2(\omega-\omega_\mu)^2}{2}\right\}. \tag{14}$$

Среднеквадратичная ошибка при узкополосной фильтрации (14) дается формулами (6) путем замены $K_{СФ} \to K_{СФ}^{(A)}$. Опуская промежуточные выкладки, аналогичные приведенным в § 2, приведем окончательный результат:

$$(\varepsilon_F^2)_{\min\max}^{(A)} \approx \frac{8}{\pi}\left[m\varkappa(T_n)_{\min}(\omega_\mu/\omega_p)\frac{(\delta_e^2+\Delta^2+\omega_\mu^2)^{1/2}}{\Delta}\right]^{1/2} A_0. \quad (15)$$

Так как $A_0 \ll F_0$, то формула (15) дает существенно меньшую величину среднеквадратичной ошибки по сравнению с (11), (12).

Выводы.

1. Характерной особенностью формул (11), (12) и (15) является зависимость $(\varepsilon_F^2)_{\min\max}$ только от минимальной шумовой температуры предусилителя. Отсутствие в этих формулах вклада тепловых шумов контура объясняется эффектом динамического демпфирования в параметрических механо-электрических преобразователях на нелинейном реактивном элементе [3]. Минимальная шумовая температура линейного широкополосного усилителя дается формулой [8]

$$\varkappa(T_n)_{\min} = \frac{\hbar\omega_p}{\ln 2}\left|\frac{G-1}{G}\right|. \quad (16)$$

Подстановка (16) в (11), (12) и (15) позволяет определить при $G \gg 1$ квантовый предел при реконструкции полезного сигнала в условиях малой априорной информации.

2. Высокая селективность механической цепи в экспериментах с пробными телами естественным образом ограничивает класс принимаемых сигналов (см. (13)). Это позволяет существенно уменьшить полосу пропускания СФ и резко снизить величину среднеквадратичной ошибки по сравнению с широкополосной фильтрацией, рекомендованной теорией [4, 5] для сигналов общего типа.

Авторы выражают благодарность В. В. Мигулину и А. Г. Яголе за обсуждение результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Брагинский В. Б. Физические эксперименты с пробными телами. М., 1970. [2] Брагинский В. Б., Манукин А. Б. Измерение малых сил в физических экспериментах. М., 1974. [3] Гусев А. В., Руденко В. Н. // Радиотехн. и электроника. 1976. 21, № 2. С. 1865—1875. [4] Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М., 1979. [5] Василенко Г. И. Теория восстановления сигналов. М., 1983. [6] Ван Трис Г. Теория обнаружения, оценок и модуляции. М., 1972. Т. 1. [7] Айнбиндер И. М. Шумы радиоприемников. М., 1974. [8] Сигмен А. Мазеры. М., 1966.

Поступила в редакцию
15.05.85

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1986. Т. 27, № 5

УДК 537.52

ОБ ИЗМЕРЕНИИ ПАРАМЕТРОВ ИМПУЛЬСНОГО СВЧ РАЗРЯДА В ВОЛНОВОДЕ МЕТОДОМ ПРОВОДИМОСТИ

П. С. Булкин, Г. С. Солнцев, С. А. Двинин, И. Э. Шкрадюк

(кафедра электроники)

Рост мощности генераторов СВЧ приводит к трудностям в передаче энергии по волноводным трактам. Величина передаваемой по тракту энергии ограничена пробойной напряженностью поля, при ко-