

Сплошные кривые на рис. 2 построены по результатам численного решения задачи с учетом конечности исходного радиуса корреляции — для различных значений $\alpha = r_k/2R_0$. Видно, что приближение δ -коррелированного шума справедливо при $\alpha \ll 1$ и при $x \gg x_d = r_k R_0 / c_0 t_k$ — в дальней зоне. Чем меньше исходный радиус корреляции, тем на меньших расстояниях применима эта идеализация. Так, для $\alpha = 0,03$ рост радиуса $s_k(x)$ практически не отличается от такового для δ -коррелированного шума на расстояниях $\sqrt{\beta} > 0,1$ ($x > 3x_d$) и повторяет все его характерные участки.

Совершая над вспомогательной (линейной) корреляционной функцией B_* типа (6) преобразование (3), удается получить решение нелинейной задачи. Результаты таких расчетов и подробное обсуждение физики нелинейных явлений будут изложены в нашей следующей работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Руденко О. В., Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики. М., 1975. [2] Ахманов С. А., Дьяков Ю. Е., Чиркин А. С. Введение в статистическую радиофизику и оптику. М., 1981. [3] Гурбатов С. Н., Малахов А. Н. Препринт ИРЭ АН СССР. № 11 (383). М., 1984. [4] Гурбатов С. Н., Саичев А. И., Якушкин И. Г. // УФН. 1983. 141, № 2. С. 221—255. [5] Бахвалов Н. С., Жилейкин Я. М., Заболотская Е. А. Нелинейная теория звуковых пучков. М., 1982. [6] Cherepetskaja E. B., Chirkin A. S., Rudenko O. V. // Proc. 7-th Intern. Symp. on Nonlinear Acoustics. Blacksburg, USA. 1976. P. 5—8. [7] Новиков Б. К., Руденко О. В., Чиркин А. С. // Тез. докл. 2-го Всесоюз. науч.-техн. совещ. «Нелинейная гидроакустика-76». Таганрог: Изд. ТРТИ, 1976. С. 15—19. [8] Демин И. Ю. Автореф. канд. дис. Горький: Изд. ГГУ, 1985. [9] Васильева О. А., Карабутов А. А., Лапшин Е. А., Руденко О. В. Взаимодействие одномерных волн в средах без дисперсии. М., 1983. [10] Руденко О. В. // Тез. докл. X Всесоюз. акуст. конф. Б 10. М.: Изд. Акуст. ин-та, 1983. С. 53—56. [11] Кузнецов В. П. // Акуст. журн. 1970. 16. С. 548—553. [12] Липидус Ю. Р., Руденко О. В. // Там же. 1984. 30. С. 797—802. [13] Курашов В. Н., Кисиль А. В., Хорошков Ю. В. // Квант. электроника. 1976. 3. С. 5—10.

Поступила в редакцию
12.07.85

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1986. Т. 27, № 5

УДК 537.311.31

ОБ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ ЖИДКИХ МЕТАЛЛОВ

Л. П. Филиппов

(кафедра молекулярной физики)

Несмотря на большое число работ, посвященных использованию теории Займана для расчетов электропроводности жидких металлов, результаты пока еще носят полукваколичественный характер (погрешность расчетов в несколько раз превышает погрешность эксперимента), относятся к очень узкой области состояний. В такой ситуации является отнюдь не лишней систематизация имеющихся экспериментальных данных, их анализ и обобщение. Выявленные при этом закономерности помимо практического значения могут иметь и эвристическую ценность.

Ниже излагаются результаты рассмотрения экспериментальных данных по электропроводности жидких металлов, в основу которого положен хорошо изученный массив для пяти щелочных металлов, вклю-

чающий данные 130 работ [1]. Именно эти металлы изучены в предельно широком диапазоне состояний. Анализируемой величиной является отношение средней длины пробега электронов l к среднему расстоянию между ионами d :

$$d = \left(\frac{M}{\rho N} \right)^{1/3},$$

где ρ — плотность, M — мольная масса, N — число Авогадро.

Из общей формулы Друде можно получить

$$\lambda \equiv \frac{l}{d} = \frac{150 (M/\rho)^{1/3}}{r},$$

где r — удельное электрическое сопротивление в мкОм·см.

На основании соображений об определяющей роли объема в описании электропроводности жидких металлов, изложенных в [2, 3], в качестве независимой переменной используем безразмерную плотность, $\varphi \equiv \rho/\rho_k$, (ρ_k — критическая плотность). При рассмотрении электропроводности на линии насыщения φ может служить и единственной независимой переменной.

Далее кратко формулируются основные результаты.

1. Зависимость λ от φ на линии насыщения является единообразной. На рис. 1 демонстрируется соответствующая кривая для калия. (Калий мы используем и для большинства дальнейших иллюстраций.) Для других щелочных металлов получаются аналогичные результаты.

Значения l/d , как видно, изменяются от нескольких десятков (при относительно низких температурах и соответственно больших φ) до ~ 1 при $\varphi \sim 1$. При значениях $\varphi = \varphi_0$, несколько отличающихся для разных металлов, кривая $\lambda(\varphi)$ асимптотически приближается к вертикали.

Для аппроксимации функции $\lambda(\varphi)$ пригодна следующая простая формула:

$$\lambda = \Lambda \frac{\varphi^2}{\varphi_0 - \varphi} = \frac{\Lambda}{\rho_k} \frac{\rho^2}{\rho_0 - \rho}. \quad (1)$$

На рис. 1 сплошная кривая соответствует расчетам по этой формуле. О качестве описания экспериментальных данных с помощью (1) можно судить также по результатам, представленным в табл. 1 для калия* (в скобках экстраполированные данные). Среднеквадратичное отклонение во всем интервале температур от точки плавления до 2000 К составляет 1,9%.

2. Значения ρ_0 в (1) близки к $\rho(0)$, результату экстраполяции ортобарической плотности $\rho(T)$ к $T=0$, — см. табл. 2. Для Na и K они практически совпадают, для остальных металлов $\rho_0 > \rho(0)$, т. е. при $T \rightarrow 0$ имеется отличное от нуля остаточное сопротивление.

Значения параметра Λ не сильно, но заметно меняются от вещества к веществу. Большее постоянство (в пределах 5%, т. е. на уровне допусков рекомендованных данных [1]) обнаруживает отношение ρ_0/ρ^* , что соответствует формуле

$$\lambda = \frac{4,2}{\rho_0} \frac{\rho^2}{\rho_0 - \rho}. \quad (2)$$

* Для плотности использованы данные из [4]. Рекомендуемые в [4] значения плотности, к сожалению, искажены необоснованным предположением о подобии температурной зависимости плотности щелочных металлов; мы использовали полиномы [4], которые служили «полуфабрикатами» этих рекомендаций.

Формула (2) является однопараметрической. Это заключение представляет интерес в связи с методикой расчета электропроводности на основе псевдопотенциала. Из найденной закономерности следует, что использование многопараметрических потенциалов в вычислениях едва ли приведет к улучшению согласия теории с экспериментом.

3. Формула (1) оказывается пригодной для расчета электросопротивления твердых металлов. Результаты расчета для калия поме-

Таблица 1

Т, К	r, мкОм·см		Т, К	r, мкОм·см	
	[1]	(1)		[1]	(1)
<i>Твердый металл</i>					
100	1,79	1,88	900	56,4	54,9
150	2,99	3,03	1000	67,9	66,2
200	4,26	4,08	1100	81,1	79,4
250	5,74	5,85	1200	96,0	95,3
300	7,47	7,35	1300	114	114
<i>Расплавы</i>					
$T_{пл}$	13,9	13,9	1400	136	135
350	14,6	14,6	1500	165	163
400	17,2	17,2	1600	(201)	199
500	22,9	22,9	1700	(250)	247
600	29,6	29,4	1800	(314)	307
700	37,3	37,1	1900	(400)	381
800	46,2	45,2	2000	(573)	570

Таблица 2

Металл	ρ_0 , г/см ³	$\rho(0)$, г/см ³	ρ_K , г/см ³ [5]	Δ	$\frac{\rho_0}{\rho^*} \equiv \frac{\rho_0}{\rho_K} \Delta$
Cs	2,20	2,03	0,43	0,80	4,1
Rb	1,69	1,59	0,35	0,82	4,0
K	0,910	0,915	0,19	0,87	4,2
Na	1,01	1,015	0,21	0,93	4,4
Li	0,6	0,56	0,13	0,8	4

Среднее $4,2 \pm 0,2$

щены в табл. 1. Различие данных [1] и полученных на основе (1), как видно, носит несистематический характер и не превышает 5% — границы погрешности рекомендуемых данных. Оптимальное значение ρ_0 для твердого калия отличается лишь на 0,3% от такового для жидкого, а Δ — на 10%.

4. Формула (1) передает зависимость удельного сопротивления от давления, если ее сочетать с ранее найденным [6] уравнением состояния

$$\pi - \pi_s = C(\omega^3 - \omega_s^3), \quad \pi \equiv P/P_K, \quad \omega \equiv \varphi - 1, \quad (3)$$

где C — постоянная величина, близкая к единице, P_K — критическое давление, индекс «s» относится к линии насыщения. При проведении расчетов на основе (1) и (3) необходимо учитывать и зависимость от давления параметра ρ_0 . Примеры расчетов изотерм калия в жидком и твердом состояниях даны на рис. 2.

Произведение $P_K C$ (см. (3)) находилось подбором. Для изотермы

жидкого калия $P_k C = 14,2$ МПа, для твердого $P_k C = 14,3$ МПа. Если для P_k взять значение 15,8 МПа из [5], получается $C = 0,90$. Среднеквадратичное отклонение экспериментальных данных от результатов расчета составляет 4% для изотермы 438 К жидкого калия и 0,8% для изотермы 273 К твердого калия. Рассмотренный метод расчета зависимости электропроводности от давления дает хорошие результаты до $\pi \sim 70$. Возрастание удельного сопротивления при более высоких давлениях формула (1) не описывает.

Тот же метод расчета зависимости $\lambda(T, P)$ может быть применен для определения поведения электропроводности на изобарах. Мы провели такие расчеты для описания уникальных экспериментальных данных, полученных Хензелом с сотрудниками для цезия в области высоких температур и давлений (см. [1]). Для области значений $\lambda > 1$ среднеквадратичное отклонение экспериментальных данных от расчетных составляет $\sim 4\%$.

5. Барическая зависимость λ имеет отношение к вопросу об изменении λ с температурой в экспериментах, проводимых по изохорам, при постоянном объеме. Изменение давления, компенсирующее тепловое расширение, вызывает изменение ρ_0 и тем самым влияет на λ . Анализ приводит к простой формуле

$$\frac{r_T}{r_{T_0}} = 1 + \frac{\delta\rho}{\Delta\rho}, \quad \delta\rho = \rho_{T_0} - \rho_T, \quad \Delta\rho = \rho_0 - \rho_{T_0}, \quad (4)$$

где ρ_{T_0} и ρ_T — плотность на линии насыщения для начальной и заданной температур эксперимента соответственно.

Подгоночные параметры в формуле (4) отсутствуют, и поэтому ее сопоставление с опытом — хороший способ апробации обсуждаемых соотношений.

В соответствии с относительной малостью $\delta\rho$ в (3) отношение r_T/r_{T_0} должно почти линейно изменяться с температурой. Можно убе-

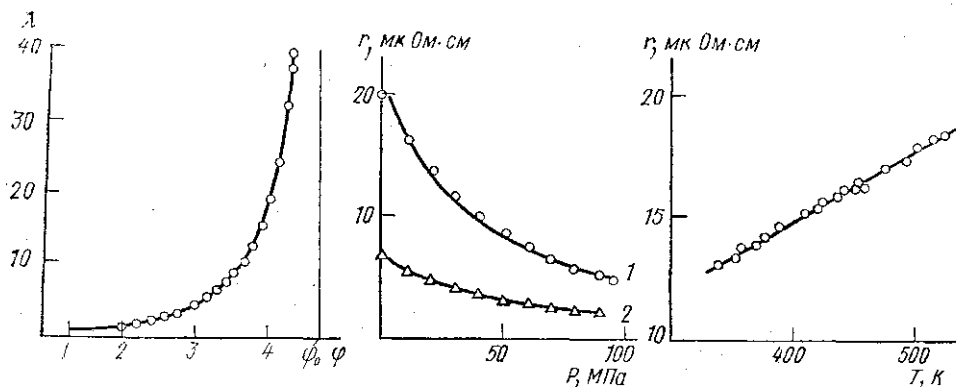


Рис. 1. Зависимость безразмерного параметра λ от приведенной плотности для жидкого калия на линии насыщения

Рис. 2. Изотерма жидкого калия при $T = 438$ К (1) и твердого калия при $T = 273$ К (2). Сплошные линии — расчет по формулам (1)–(2), значки — экспериментальные данные из [1]

Рис. 3. Зависимость удельного сопротивления калия от температуры при постоянном объеме. Прямая — расчет по (4), точки — эксперимент из [7]

даться (рис. 3) в том, что это действительно имеет место. Прямая на рисунке — расчет по (4), точки — данные из [7].

6. Формула (1) позволяет установить простую связь с величиной

длинноволнового структурного фактора a , выражаемого через изотермическую сжимаемость β_T и мольный объем

$$a = \beta_T RT/V. \quad (5)$$

Из формулы (3) можно получить

$$\frac{a^{-1}}{Cz_K} \tau = \left(\frac{\rho}{\rho_K} \right)^2 \left(1 - \frac{\rho_K}{\rho} \right)^2,$$

где $z_K = \frac{P_K V_K}{RT_K}$, $\tau \equiv \frac{T}{T_K}$.

Для τ можно записать $\tau = \frac{\rho(0)\rho}{\rho_K} \frac{1}{\alpha_0}$, где α_0 — коэффициент теплового расширения при экстраполяции к $T=0$. В комбинации с формулой (1) для случая $\rho(0) \sim \rho_0$ получаем

$$\lambda a = \frac{\Lambda}{3} \frac{1}{\alpha_0 C z_K} \frac{1}{(1 - \rho_K/\rho)^2}. \quad (6)$$

Фигурирующую в (6) комбинацию параметров можно оценить, используя соотношение из [6]

$$Z_K = \frac{1}{2B}, \quad (7)$$

где B — параметр, фигурирующий в формуле для температурной зависимости ортобарической плотности

$$\omega = B\vartheta^{1/2} + (B-1)\vartheta, \quad \vartheta \equiv 1 - \tau. \quad (8)$$

Из (8) можно получить и формулу для α_0 :

$$\alpha_0 = \frac{3}{2} B - 1.$$

В результате получаем

$$\lambda a \left(1 - \frac{\rho_K}{\rho} \right)^2 = \text{const} = \frac{4}{9} \frac{\Lambda}{C} \frac{1}{1 - (2/3)B^{-1}}. \quad (9)$$

Для калия $\Lambda = 0,87$ (см. табл. 2), $B = 2,37$ [6], $C \sim 1$ (см. выше), правая часть должна быть равна $\sim 1/2$.

Таблица 3

T, K	$\beta_T \cdot 10^{11}, \frac{M^2}{H}$ [8]	a	λ	$\lambda a \left(1 - \frac{\rho_K}{\rho} \right)^2$
400	40,0	0,0277	31,7	0,52
500	45,1	0,0379	24,0	0,52
600	50,1	0,0490	18,8	0,52
700	56,2	0,0622	15,1	0,52
800	64,0	0,0785	12,3	0,52
900	73,4	0,0979	10,19	0,53
1000	84,5	0,121	8,55	0,53
1100	97,4	0,148	7,25	0,54
1200	112	0,178	6,20	0,54
1300	129	0,214	5,30	0,53
1400	149	0,254	4,50	0,51
1500	173	0,301	3,79	0,48

Результаты апробации формулы (9) по данным для калия приведены в табл. 3. (Значения сжимаемости для расчетов a согласно (5) взяты из работы [8], для плотности использованы данные из [4].)

В существовании параллелизма между удельным сопротивлением

r и структурным фактором a естественно видеть отражение теории Займана. К тому же факту можно подойти, однако, учитывая, что с точностью до отношения теплоемкостей $\alpha \sim Mu^2/(RT)$, где u — скорость звука, а пропорциональность $\lambda \sim Mu^2/(RT)$ — результат теории Блоха, рассматривавшего механизм рассеяния электронов на фононах.

Описанные выше закономерности, как уже отмечено, получены на основе анализа данных для щелочных металлов. Экспериментальный материал, имеющийся для других расплавленных металлов, не противоречит сделанным выводам ни в одном пункте. Однако неизученность свойств большинства иных жидких металлов не дает пока возможности получить заслуживающие обсуждения следствия.

В целом же есть все основания думать, что найденные закономерности будут полезны для апробации теоретических схем и вычислений. В частности, представляется важной возможность единого подхода к описанию электропроводности твердых и жидких металлов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Chi T. C. // J. Chem. Ref. Data. 1979. 8. N 2. P. 339—438. [2] Соловьев А. Н. // Журн. прикл. мех. и технич. физики. 1963. № 6. С. 153—157. [3] Банчила С. Н., Филиппов Л. П. // ТВТ. 1973. 11, № 6. С. 1301—1305. [4] Шпильрайн Э. Э., Якимович К. А., Сквородько С. Н., Мозговой А. Г. // Обзоры по теплофизическим свойствам веществ ИВТ АН СССР. М., 1983. № 6(44). [5] Гоголева В. В., Фокин Л. Р. Препринт ИВТ АН СССР № 1-061. М., 1981. [6] Филиппов Л. П., Благодяров Л. А. // Изв. вузов. Сер. Энергетика. 1985. № 5. С. 14—27. [7] Lien S. Y., Sivertsen J. M. // Phil. Mag. 1969. 20, N 166. P. 759—762. [8] Шпильрайн Э. Э., Якимович К. А., Мозговой А. Г. // ТВТ. 1976. 14, № 5. С. 1099—1101.

Поступила в редакцию
05.07.85

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1986. Т. 27, № 5

АСТРОНОМИЯ

УДК 521.3/6

ОПТИМАЛЬНЫЕ ДВУХИМПУЛЬСНЫЕ ПЕРЕЛЕТЫ НА АСИМПТОТИЧЕСКУЮ ТРАЕКТОРИЮ

С. И. Сумароков

(ГАИШ)

При численном определении оптимальной импульсной траектории для задачи трех тел возникают трудности, связанные с наличием особенностей в центре каждого тела, а также с большими затратами машинного времени.

Первая из этих трудностей может быть разрешена методом регуляризации. Работы [1—3] позволили обойти и вторую трудность с помощью метода, который называется методом многих конических сечений. Идея его состоит в использовании соответствующих конических сечений аппарата относительно каждого тела.

Для определения траектории полета приходится решать краевую задачу, которую называют задачей Ламберта трех тел. Для этого необходимо знание матрицы первых производных конечных величин радиуса-вектора и скорости по начальным. Эта матрица называется матрицей перехода состояний. В статье [4] показана возможность ее аналитического построения путем вычислений матриц перехода соответствую-