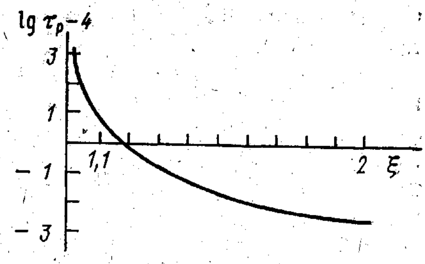
оказывается запрещенным (при $\xi=1$, или $\delta=1$, $\Phi=0$). Из рисунка, на котором представлена зависимость $\lg\tau_p-4$ от ξ, видно, что с ростом поля время жизни $\tau_p=w^{-1}$ протона быстро уменьшается, достигая (при $C_-^2\simeq 0{,}04$, т. е. для углов Вайнберга, близких к принятому) значения ~ 10 с уже при $\xi\approx 2{,}15$ (для ряда значений ξ времени жизни τ_p приведены в таблице).



Полученные результаты указывают на возможность заметного влияния рассмотренного процесса на $n-p$ баланс в магнитных нейтронных звездах с большими значениями индукции поля, в полях $B<B_0$ процесс будет запрещен.

ξ	1	1,025	1,05	1,1	1,15	1,2	1,3	1,4	1,5	1,7	2
$\tau_p\cdot 10^{-4}$, с	∞	1088	95,54	8,328	1,987	0,716	0,169	0,060	0,027	0,008	0,002

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Газазян А. Г.//Изв. АН АрмССР. 1965. 18, № 1. С. 126—133. [2] Жарков Г. Ф.//Ядерная физика. 1965. 1. С. 173—182.

Поступила в редакцию
30.09.85

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1986. Т. 27, № 6

УДК 530.145:539.12.172

ЗАМЕЧАНИЯ К СТАЦИОНАРНОЙ ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

Ю. В. Попов, Т. В. Попова

(НИИЯФ)

1. В реальном физическом эксперименте по рассеянию частиц чаще всего имеют дело с электрически заряженными частицами, т. е. взаимодействующими друг с другом на далеких расстояниях по закону Кулона. В то же время стационарная теория рассеяния как двух, так и нескольких частиц и ее математический аппарат, излагаемый в большинстве учебников по квантовой механике, приспособлены для описания процессов рассеяния объектов с короткодействующими потенциалами, убывающими на бесконечности быстрее r^{-2}. В теории рассеяния двух частиц данное противоречие устраняется благодаря тому, что известен точный вид кулоновской волновой функции. Это обстоятельство позволяет определить дифференциальное сечение рассеяния двух заряженных квантовых частиц, как атомных, так и ядерных, т. е. взаимодействующих дополнительно посредством короткодействующего потенциала. Однако теория рассеяния трех и более частиц сталкивается с рядом не только вычислительных, но и методологических трудностей [1—4], что связано, на наш взгляд, прежде всего с проблемой формулировки граничных условий, адекватных поставленной задаче. Дальнодействие кулоновского взаимодействия частиц настолько велико,

что при постановке задачи рассеяния невозможно не учитывать форму и место образования начального волнового пакета.

Цель настоящей работы — заострить внимание на некоторых логических противоречиях, возникающих уже на этапе формулировки задачи рассеяния двух заряженных частиц и являющихся, по-видимому, причиной известных математических трудностей теории. Кроме того, учет этих особенностей при изложении учебного материала по квантовой механике был бы полезен с методической точки зрения.

2. Остановимся вначале на некоторых противоречиях, которые порождает прямое продолжение теории рассеяния с короткодействием на кулоновский случай. В стационарной теории рассеяния двух нейтральных частиц ищется решение уравнения Шрёдингера

$$[\Delta+p^2-V(r)]\varphi(\mathbf{r},\ \mathbf{p})=0, \qquad (1)$$

имеющее на бесконечности вид суммы плоской и расходящейся сферической (амплитуда A (θ)) волн:

$$\varphi(\mathbf{r},\ \mathbf{p})_{r\to\infty}\simeq\exp(i\mathbf{pr})+A(\theta)\exp(ipr)/r, \qquad (2)$$

θ — угол между векторами $\mathbf{p}$ и $\mathbf{r}$. Подобная абстракция возникает при целом ряде предположений о соотношении величин, характеризующих процесс рассеяния [5]. В частности, размеры волнового пакета, падающего на мишень, должны быть значительно больше характерных расстояний взаимодействия частиц. Очевидно, что в кулоновском случае реализуется как раз обратная ситуация и форма волнового пакета должна быть принята во внимание. Если же этого не сделать, то можно прийти к противоречию. В самом деле, согласно большинству учебников, функция

$$\varphi_c(\mathbf{r},\ \mathbf{p})=\Gamma(1+i\lambda)\exp\left(-\frac{\pi\lambda}{2}+i\mathbf{pr}\right)\Phi(-i\lambda,\ 1;\ i(pr-\mathbf{pr})],\quad \lambda=z_1z_2e^2\mu/p, \qquad (3)$$

удовлетворяющая уравнению (1) с потенциалом $V(\mathbf{r})=2z_1z_2e^2\mu/r$, при $r\to\infty$ имеет асимптотический вид ($\theta\neq 0$)

$$\varphi_c(\mathbf{r},\ \mathbf{p})_{r\to\infty}\simeq\exp\,[i\mathbf{pr}+i\lambda\ln(pr-\mathbf{pr})]+A_c(\theta)\exp(ipr-i\lambda\ln 2pr)/r, \qquad (4)$$

где

$$A_c(\theta)=-\frac{\lambda}{2p}\,\frac{\Gamma(1+i\lambda)}{\Gamma(1-i\lambda)}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{-2(1+i\lambda)}. \qquad (5)$$

Из аналогии выражений (4) и (2) приходят к выводу, что $A_c(\theta)$ — это амплитуда рассеяния в кулоновском случае, соответствующая наблюдаемому резерфордовскому сечению [6].

С другой стороны, определяющим понятием в стационарной теории рассеяния является понятие тока. Сечение рассеяния определяется как

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{dI}{NI_0d\Omega},$$

где dI — элемент тока, рассеивающегося в элемент телесного угла $d\Omega$, I_0 — начальный ток, N — число частиц мишени. Плотность тока в квантовой механике есть

$$\mathbf{j}=\mathrm{Im}\,\varphi^*\nabla\varphi=\alpha\mathbf{p}+\beta p\mathbf{n} \qquad (6)$$

($\mathbf{n}=\mathbf{r}/r$ — единичный вектор). Если $\theta\neq0$, то из (2) получаем при $r\to\infty$

$$\alpha\to1,\ \beta\to|A(\theta)|^2/r^2, \tag{7}$$

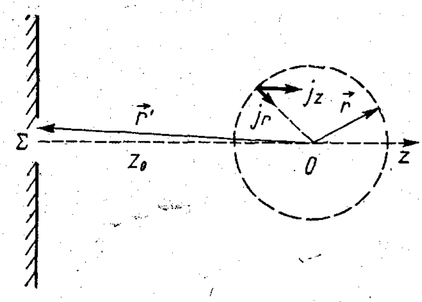
т. е. коэффициент β как раз определяет ток в элементе телесного угла $d\Omega$ вдоль направления $\mathbf{n}$.

Подставим теперь (3) в (6). Тогда нетрудно убедиться, что при $r\to\infty$ и $\theta\neq0$

$$\alpha\simeq1-\lambda/x,\ \beta\simeq\lambda/x+O(r^{-2}), \tag{8}$$

где $x=pr-\mathbf{pr}=pr(1-\cos\theta)$. Таким образом, коэффициент β пропорционален r^{-1}, а не r^{-2} при $r\to\infty$ и, следовательно, не имеет ничего общего с выражением (7); более того, направление радиальной составляющей тока зависит от знаков зарядов z_1 и z_2. Величина $A_c(\theta)$ вида (5) содержится лишь в следующем члене разложения коэффициента β по обратным степеням r.

Этот факт давно известен, но, на наш взгляд, традиционное исключение из рассмотрения первого слагаемого в выражении для коэффициента β (8) на том основании, что оно связано с квазиплоской волной в (4), выглядит искусственным.



3. Отмеченное свойство кулоновской функции и связанного с ней тока порождает целый ряд логических и математических проблем при использовании ее как объекта изучения в теории рассеяния. Физический волновой пакет всегда ограничен в пространстве, и в случае заряженных частиц он целиком будет подвержен влиянию рассеивающего центра, на каком бы расстоянии от него он не находился. В самом деле, рассмотрим следующую ситуацию, моделирующую реальный эксперимент по рассеянию. Из отверстия Σ в экране падает пучок на мишень, расположенную на расстоянии z_0 от экрана (рисунок). Функция Грина $g(\mathbf{r},\mathbf{r}';\mathbf{p})$ удовлетворяет уравнению

$$(\Delta+p^2-V(r))g(\mathbf{r},\mathbf{r}';\mathbf{p})=\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \tag{9}$$

Если потребовать, чтобы функция $\varphi(\mathbf{r},\mathbf{p})$ удовлетворяла на бесконечности условию излучения

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}-ip\varphi\right)=0,$$

а в плоскости отверстия описывала бы примерно плоскую волну с амплитудой u_0, то из (1) и (9) будет следовать [7]:

$$\varphi(\mathbf{r},\mathbf{p})\simeq-u_0\exp(-ipz_0)\iint\limits_{\Sigma} d\xi d\eta\left(\frac{\partial g}{\partial z'}-ipg\right)_{z'=-z_0}. \tag{10}$$

Здесь вектор $\mathbf{r}'$ имеет компоненты $(\xi,\eta;-z_0)$. Пусть a — характерный размер отверстия Σ. Потребуем, чтобы выполнялись условие $D=pa^2/z_0\ll1$ (так называемая область дифракции Фраунгофера) и, для удобства, условие нормировки $u_0pS_\Sigma/2\pi iz_0=1$. Нетрудно показать, пользуясь формулой (10), что все основные положения формальной теории рассеяния справедливы в области $a \ll r \ll z_0$. Например, если $V(r)=0$, то

$$g_0 = -\frac{1}{4\pi}\exp[ip\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|]/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \simeq -\frac{1}{4\pi}\exp[ipr' - ip(\mathbf{n}'\mathbf{r})]/r'.$$

Подставляя эту величину в (10), получим $\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \exp(ipz)$, т. е. плоскую волну. Выражение (2) получится, если воспользоваться операторным соотношением для функции Грина $\hat{g} = \hat{g}_0 + \hat{g}_0 \hat{t} \hat{g}_0$ и тем, что характерный радиус действия короткодействующего потенциала $\rho_0 \ll r, r'$. Наконец, если взять кулоновскую функцию Грина [8], то формула (10) даст с точностью до фазового множителя $\exp[-i\lambda \ln 2pz_0]$ волновую функцию (3), т. е.

$$\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \exp[-i\lambda \ln 2pz_0]\,\varphi_c(\mathbf{r}, \mathbf{p}). \qquad (11)$$

Таким образом, квантовая ситуация, соответствующая рассеянию, действительно описывается волновой функцией типа (3) в области $a \ll r \ll z_0$. Однако если для короткодействующих потенциалов ввиду наличия еще одного масштаба ρ_0 можно абстрагироваться от способа и места формирования падающего на мишень волнового пакета и формально положить в (10) $z_0 \to \infty$ и $u_0 \to \infty$ ($u_0/z_0 = \mathrm{const}$), то функция (11) включает такую информацию посредством фазового множителя, не имеющего предела при $z_0 \to \infty$. Таким образом, беря волновую функцию $\varphi_c(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ в качестве объекта теории рассеяния, мы не можем не учитывать конкретных граничных условий задачи.

4. С математической точки зрения включение в рассмотрение граничных условий означает выбор решения уравнения (1), моделирующего реальную ситуацию, в виде

$$\Psi(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \oint d\mathbf{n}\,\varphi_c(\mathbf{r}, p\mathbf{n})\,F(\mathbf{n}, \mathbf{p}) \qquad (12)$$

или, раскладывая (12) по парциальным волнам,

$$\Psi(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{1}{4\pi p}\sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l i^l (2l+1)\exp(i\delta_l)\,R_l(r, p)\,P_l(\cos\theta), \qquad (13)$$

где α_l — компоненты разложения гладкой функции F, обеспечивающие сходимость ряда (13), а вид функции R_l можно найти в любом учебнике. При достаточно больших r из (13) следует

$$\Psi(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \simeq -F(\pi-\theta)\,\frac{\exp(-ipr + i\lambda \ln 2pr)}{ipr} + C(\theta)\,\frac{\exp(ipr - i\lambda \ln 2pr)}{ipr}, \qquad (14)$$

где

$$C(\theta) = 2\pi \int_0^{\pi} S(\theta, \theta')\,F(\theta')\sin\theta' d\theta' \qquad (15)$$

и

$$S(\theta, \theta') = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} x^{1+2i\lambda} J_0\left(2x\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta'}{2}\right) J_0\left(2x\sin\frac{\theta'}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right) dx. \qquad (16)$$

В общем случае (если ось z не направлена вдоль вектора $\mathbf{p}$) S-матрицу (16) можно записать в виде

$$S(\mathbf{n}-\mathbf{n}') = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^\infty x^{1+2i\lambda} J_0(x\,|\mathbf{n}-\mathbf{n}'|)\,dx.$$

При этом (15) будет выглядеть так:

$$C(\mathbf{n}) = \oint S(\mathbf{n}-\mathbf{n}')\,F(\mathbf{n}', \mathbf{p})\,d\mathbf{n}'.$$

Здесь $\mathbf{n}$ — единичный вектор, направленный в точку наблюдения, $\mathbf{n}'$ характеризует падающую волну.

Выражение (16) представляет собой S-матрицу для кулоновского случая, не сводящуюся, однако, к сумме δ-функции и регулярной части, как в случае короткодействующих потенциалов. При $\lambda=0$ получим из (16)

$$S(\theta, \theta') = \frac{1}{2\pi}\,\delta(\cos\theta-\cos\theta').$$

Легко также проверить, что

$$2\pi \int\limits_0^\pi S^*(\theta,\theta'')\,S(\theta'', \theta')\sin\theta''d\theta'' = \frac{1}{2\pi}\,\delta(\cos\theta-\cos\theta'),$$

т. е. функция (16), как и следовало ожидать, удовлетворяет условию унитарности.

Нетрудно показать, что если $\int\limits_0^\pi F(\theta)\sin\theta d\theta=1$ и θ_0 — характерная угловая ширина падающего пучка, то при $\theta\gg\theta_0$ выражение (15) переходит в (5). В то же время, если $F(\theta)$ — гладкая функция, то функция $C(\theta)$ конечна во всем угловом диапазоне, включая точку $\theta=0$.

Предельный случай бесконечно узкого углового спектра (или плоской падающей волны) получается при $F(\theta)=2\delta(1-\cos\theta)$. В этом случае

$$C(\theta) = \int\limits_0^\infty x^{1+2i\lambda} J_0\left(2x\sin\frac{\theta}{2}\right)dx \qquad (17)$$

и при $\theta\neq0$ $C(\theta)=ipA_c(\theta)$. Однако, в отличие от $A_c(\theta)$ в (5), функция $C(\theta)$ (17) интегрируема с любой гладкой функцией во всем диапазоне углов θ. Таким образом, представление (16) генерирует новый тип обобщенной сингулярной функции, которую можно рассматривать как не зависящую от граничных условий абстракцию стационарной теории рассеяния заряженных частиц.

5. Построив S-матрицу рассеяния заряженных частиц, уместно обсудить вопрос об амплитуде рассеяния. При $r\to\infty$ имеет место равенство

$$\exp(i\mathbf{pr}) \approx 2\delta(1-\cos\theta)\,\frac{\exp(ipr)}{ipr} - 2\delta(1+\cos\theta)\,\frac{\exp(-ipr)}{ipr},$$

которое понимается в обобщенном смысле, т. е. свертка его левой и правой частей с гладкой функцией, зависящей от угла, дает один и тот же результат. Сравнение (2) с аналогом формулы (14) в случае короткодействующих сил позволяет однозначно определить амплитуду рассеяния: $C(\theta)=2\delta(1-\cos(\theta)+ipA(\theta)$. Характерной особенностью функции $A(\theta)$ является то, что в ней сосредоточена вся информация о константе взаимодействия.

У нас, однако, нет критериев также однозначно определить амплитуду $\tilde{A}_c(\theta)$ в кулоновском случае. Действительно, первое слагаемое в (4) даже в обобщенном понимании не равно $2\delta(1-\cos\theta)\times \times\exp(ipr-i\lambda\ln 2pr)/(ipr)-2\delta(1+\cos\theta)\exp(-ipr+i\lambda\ln 2pr)/(ipr)$. Этот факт давно известен [6]. Коль скоро константа взаимодействия (в данном случае λ) присутствует в выражениях как для падающей, так и для рассеянной волн, то мы можем вычесть из $C(\theta)$ любую функцию вида $2\gamma(\lambda)\delta(1-\cos\theta)$, если только $\gamma(0)=1$, и получить, например,

$$\tilde{A}_c(\theta)=\frac{1}{ip}\int_0^\infty x\,(x^{2i\lambda}-\gamma(\lambda))\,J_0\left(2x\sin\frac{\theta}{2}\right)dx, \tag{18}$$

что при $\theta\neq 0$ совпадает с $A_c(\theta)$ в (5). Можно построить и другие подобные конструкции. Это обстоятельство заставляет осторожнее относиться к так называемым кулоновским асимптотическим состояниям, постулируемым в работах [9].

Таким образом, однозначность определения S-оператора, связывающего начальное и конечное состояния рассеяния, из-за неопределенности граничных условий не обусловливает однозначность амплитуды рассеяния, как в случае короткодействующих потенциалов. Это означает, и это мы наблюдаем на самом деле, что созданный для короткодействия математический аппарат, в частности аппарат интегральных уравнений для амплитуды рассеяния, должен быть существенно перестроен в кулоновском случае.

В заключение авторы выражают благодарность проф. С. П. Меркурьеву и д-ру физ.-мат. наук А. М. Поповой за полезные обсуждения работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Dollard J.//J. Math. Phys. 1964. 5. P. 729—738. [2] Меркурьев С. П., Фаддеев Л. Д. Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц. М., 1985. Гл. 5. [3] Kok L. P.//Nucl. Phys. 1981. A353. P. 171—181. [4] Popov Yu. V.//J. Phys. B. 1981. 14. P. 2449—2457. [5] Тейлор Дж. Теория рассеяния. Квантовая теория нерелятивистских столкновений. М., 1975. Гл. 3, § 4—6; гл. 10, § 4. [6] Gordon W.//Z. Phys. 1928. 48. P. 180—189. [7] Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П. Теория волн. М., 1979. Гл. 8, § 1. [8] Hostler L., Pratt R. H.//Phys. Rev. Lett. 1963. 10. P. 469—472. [9] Van Haeringen H.//J. Math. Phys. 1976. 17. P. 995—1000; Ibid. 1977. 18. P. 927—940.

Поступила в редакцию
24.07.85