ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1986. Т. 27, № 6

УДК 538.574.32

ОБ ИЗЛУЧЕНИИ НЕПОДВИЖНЫХ ИСТОЧНИКОВ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ В СРЕДАХ С МГНОВЕННО МЕНЯЮЩЕЙСЯ АНИЗОТРОПИЕЙ

В. В. Колесов

(кафедра квантовой теории и физики высоких энергий)

В средах, диэлектрическая проницаемость которых зависит от времени, возможно излучение электромагнитных волн неподвижными электрическими зарядами. Энергия излучения при этом черпается из источника, меняющего свойства среды во времени. Впервые возможность такого излучения указана в [1]. В [2] сформулированы условия, при которых оно должно генерироваться. Эти условия можно выразить так: единственным способом изменения тензора диэлектрической проницаемости во времени, при котором неподвижные заряды не излучают, является умножение этого тензора на число. Методом теории возмущений в [2] была получена также общая формула для полной энергии, излучаемой произвольным распределением покоящихся зарядов при переходе (не обязательно мгновенном) среды из изотропной в анизотропную в предположении малости анизотропной добавки.

Решение задач об излучении источников электромагнитного поля в анизотропных средах и в особенности в двухосных кристаллах, т. е. средах, в которых все три главных значения тензора диэлектрической проницаемости различны, сталкивается со значительными трудностями, возникающими при исследовании характеристик излучаемых волн, т. е. поляризации, показателя преломления и лучевого вектора. Эти трудности в значительной мере могут быть устранены за счет использования так называемой ковариантной, т. е. не зависящей от выбора системы координат, формы тензора диэлектрической проницаемости, подробно рассмотренной в [3]. При этом тензор диэлектрической проницаемости двухосного кристалла представляется в виде

$$\mathbf{D}=\hat{\varepsilon}\mathbf{E}=\alpha\mathbf{E}+\beta[\mathbf{p}(\mathbf{q}\mathbf{E})+\mathbf{q}(\mathbf{p}\mathbf{E})],\qquad \varepsilon_{ik}=\alpha\delta_{ik}+\beta(p_iq_k+p_kq_i), \tag{1}$$

где α, β — числа, $|\mathbf{p}|=|\mathbf{q}|=1$. Векторы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ направлены по лучевым осям (бирадиалям) кристалла [3]. Если $\varepsilon^{(x)}<\varepsilon^{(y)}<\varepsilon^{(z)}$ — главные значения тензора диэлектрической проницаемости кристалла, то $\alpha=\varepsilon^{(y)}$, $\beta=(\varepsilon^{(z)}-\varepsilon^{(x)})/2$ — степень анизотропии среды, $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ лежат в плоскости xz, вектор $\mathbf{q}+\mathbf{p}$ направлен по z, $\mathbf{q}-\mathbf{p}$ — по x. Обратный тензор $\hat{\varepsilon}^{-1}$ также может быть записан в виде (1). В этом случае соответствующие векторы $\mathbf{p}'$, $\mathbf{q}'$ направлены по оптическим осям (бинормалям) кристалла.

Ниже рассматривается излучение, возникающее в поле произвольного неподвижного распределения зарядов при мгновенном изменении тензора диэлектрической проницаемости. Материальные уравнения при этом имеют следующий вид (скачок происходит в момент $t=0$):

$$t<0,\ \mathbf{D}=\alpha_1\mathbf{E}+\beta_1[\mathbf{p}_1(\mathbf{q}_1\mathbf{E})+\mathbf{q}_1(\mathbf{p}_1\mathbf{E})],$$

$$t>0,\ \mathbf{D}=\alpha_2\mathbf{E}+\beta_2[\mathbf{p}_2(\mathbf{q}_2\mathbf{E})+\mathbf{q}_2(\mathbf{p}_2\mathbf{E})].$$

Поле излученных волн можно найти, воспользовавшись вытекающими из уравнений Максвелла граничными условиями на скачке. В данном случае их удобно использовать в виде

$$(\mathbf{D})_{-0}=(\mathbf{D})_{+0}, \quad \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right)_{-0}=\left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right)_{+0}. \tag{2}$$

В [4] было показано, что в нестационарной среде могут излучаться только поперечные волны. Поэтому в (2) существенны лишь четыре уравнения для поперечных компонент полей, из которых можно найти четыре скалярные величины — амплитуды излученных волн. Эти амплитуды полностью определяют поля излучения, так как поляризация и показатель преломления зависят только от направления излучения и геометрии кристалла. Обозначим их через $d_1^+(\mathbf{k})$, $d_2^+(\mathbf{k})$ для волны с показателем преломления n_+ и через $d_1^-(\mathbf{k})$, $d_2^-(\mathbf{k})$ для волны с показателем преломления n_-. Тогда пространственный фурье-образ поля излучения запишется в виде

$$\mathbf{D}_\mathbf{k}^{\text{rad}}=d_1^+(\mathbf{k})\,\mathbf{a}_+(\mathbf{k})\exp\left(-i\frac{kc}{n_+}t\right)+d_2^+(\mathbf{k})\,\mathbf{a}_+(\mathbf{k})\exp\left(i\frac{kc}{n_+}t\right)+$$

$$+d_1^-(\mathbf{k})\,\mathbf{a}_-(\mathbf{k})\exp\left(-i\frac{kc}{n_-}t\right)+d_2^-(\mathbf{k})\,\mathbf{a}_-(\mathbf{k})\exp\left(i\frac{kc}{n_-}t\right), \tag{3}$$

где $\mathbf{a}_\pm(\mathbf{k})$ — орты (неединичные) поляризации.

Помимо того в среде присутствует поле, создаваемое неподвижным распределением зарядов с плотностью $\rho(\mathbf{r})$. Так как среда анизотропна, электрическая индукция имеет поперечную составляющую, фурье-образ которой равен

$$\mathbf{D}_{q,\mathbf{k}}^{\text{tr}}=-i\cdot 4\pi\rho_\mathbf{k}\frac{\beta}{\alpha}\,\frac{\mathbf{q}(\mathbf{kp})+\mathbf{p}(\mathbf{kq})-2(\mathbf{kp})(\mathbf{kq})}{k^2+(\beta/\alpha)((\mathbf{kp})^2+(\mathbf{kq})^2)}. \tag{4}$$

Здесь $\rho_\mathbf{k}$ — фурье-образ плотности заряда.

До скачка в среде присутствут только поле $(\mathbf{D}_{q,\mathbf{k}})_1$. После скачка поле равно $(\mathbf{D}_{q,\mathbf{k}})_2+\mathbf{D}_\mathbf{k}^{\text{rad}}$. После подстановки этих полей в (2) получаем, что, так как индукция (4) не зависит от времени, второе условие из (2) означает равенство амплитуд волн, излученных по и против $\mathbf{k}: d_1^+=d_2^+=d^+,\ d_1^-=d_2^-=d^-$.

Как показано в [3], показатель преломления волны, распространяющейся в направлении $\mathbf{e}=\mathbf{k}/k$ в кристалле, выражается через параметры α', β', $\mathbf{p}'$, $\mathbf{q}'$ тензора $\hat{\varepsilon}^{-1}$ следующим образом:

$$n_\pm^{-2}=\alpha'+\beta'\left((\mathbf{q}'\mathbf{p}')-\cos(\widehat{\mathbf{e},\mathbf{q}'}\pm\widehat{\mathbf{e},\mathbf{p}'})\right), \tag{5}$$

а орты поляризации (неединичные):

$$\mathbf{a}_\pm=\frac{[\mathbf{e}\mathbf{q}']}{\sin(\widehat{\mathbf{e},\mathbf{q}'})}\pm\frac{[\mathbf{e},\mathbf{p}']}{\sin(\widehat{\mathbf{e},\mathbf{p}'})}. \tag{6}$$

Подставляя (3)—(6) в (2), найдем амплитуды излученных волн:

$$d_\pm(\mathbf{k})=\frac{(\Delta\mathbf{D}_{q,\mathbf{k}}^{\text{tr}},\mathbf{a}_\pm)}{2(\mathbf{a}_\pm)^2}, \tag{7}$$

где $\Delta\mathbf{D}_{q,\mathbf{k}}^{\text{tr}}=(\mathbf{D}_{q,\mathbf{k}}^{\text{tr}})_1-(\mathbf{D}_{q,\mathbf{k}}^{\text{tr}})_2$.

Найдя теперь магнитное поле излученных волн, можно вычислить энергию излучения по формуле

$$\int_0^\infty W_\omega d\omega = 2\pi^2 \int \mathbf{H}_\mathbf{k}\mathbf{H}_{-\mathbf{k}} d\mathbf{k}, \tag{8}$$

при использовании которой нужно провести усреднение по времени.

В результате получим

$$\int_0^\infty W_\omega^\pm d\omega = -4\pi^2 \int d\mathbf{k}\, \frac{d_\pm^2 (\mathbf{a}_\mp)^2}{n_\pm^2}. \tag{9}$$

Подставив (7) в (9), получим

$$\int_0^\infty W_\omega^\pm d\omega = -\pi^2 \int d\mathbf{k}\, \frac{(\Delta \mathbf{D}_{q,\mathbf{k}}^{tr}, \mathbf{a}_\pm)^2}{n_\pm^2 (\mathbf{a}_\pm)^4} (\mathbf{a}_\mp)^2. \tag{10}$$

При этом в выражения (5), (6) для показателя преломления и ортов поляризации надо подставить $\alpha'=\alpha_2'$, $\beta'=\beta_2'$, $\mathbf{q}'=\mathbf{q}_2'$, $\mathbf{p}'=\mathbf{p}_2'$.

Простейшим вариантом изменения анизотропных свойств двухосного кристалла является скачок степени анизотропии среды β: $\alpha_1=\alpha_2=\alpha$, $\mathbf{p}_1=\mathbf{p}_2=\mathbf{p}$, $\mathbf{q}_1=\mathbf{q}_2=\mathbf{q}$, $\beta_2\neq\beta_1$. Если $\beta_1=0$, то этот случай соответствует возникновению анизотропии в изотропной среде. Чтобы упростить рассмотрение излучения, возникающего при таком изменении свойств среды, воспользуемся тем, что в реальных кристаллах обычно $\beta/\alpha\ll 1$, и будем во всех выражениях удерживать только члены, линейные по β/α. В этом приближении (5) и (6) принимают соответственно вид

$$n_\pm^2 = \alpha + \beta\left((\mathbf{qp}) - \cos(\widehat{\mathbf{e}, \mathbf{q}} \pm \widehat{\mathbf{e}, \mathbf{p}})\right),$$

$$\mathbf{a}_\pm = \frac{[\mathbf{eq}]}{\sin(\widehat{\mathbf{e}, \mathbf{q}})} \pm \frac{[\mathbf{ep}]}{\sin(\widehat{\mathbf{e}, \mathbf{p}})}.$$

Для полной энергии излучения, считая $\beta_1/\alpha\ll 1$, $\beta_2/\alpha\ll 1$, из (10) получим

$$\int_0^\infty W_\omega^\pm d\omega = \pm\frac{8\pi^4(\beta_1-\beta_2)^2}{\alpha^3}\int d\mathbf{k}\,\frac{|\rho_\mathbf{k}|^2}{k^4}\,\frac{(\mathbf{k}[\mathbf{qp}])^2 \sin^2(\widehat{\mathbf{e}, \mathbf{q}} - \widehat{\mathbf{e}, \mathbf{p}})}{\sin(\widehat{\mathbf{e}, \mathbf{q}})\sin(\widehat{\mathbf{e}, \mathbf{p}})\left((\mathbf{qp}) - \cos(\widehat{\mathbf{e}, \mathbf{q}} \pm \widehat{\mathbf{e}, \mathbf{p}})\right)} \times$$

$$\times\left[1 - \frac{\beta_1+\beta_2}{\alpha}\left((\mathbf{eq})^2 + (\mathbf{ep})^2\right) - \frac{\beta_2}{\alpha}\left((\mathbf{qp}) - \cos(\widehat{\mathbf{e}, \mathbf{q}} \pm \widehat{\mathbf{e}, \mathbf{p}})\right)\right]. \tag{11}$$

Здесь под интегралом оставлены только члены, линейные по β/α. Если же эти члены отбросить, то останется выражение, согласующееся с формулой, выведенной в [2] в первом порядке теории возмущений.

Энергия излучения в (11) обращается в нуль при $(\widehat{\mathbf{e}, \mathbf{q}}) = (\widehat{\mathbf{e}, \mathbf{p}})$, т. е. когда волновой вектор лежит в плоскости, проходящей через биссектрису угла $(\widehat{\mathbf{q}, \pm\mathbf{p}})$ перпендикулярно плоскости $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$.

Заметим, что формулы (10), (11) не дают углового распределения излучения, поскольку в анизотропной среде направление распространения энергии не совпадает с направлением волнового вектора. С точностью до членов порядка β^2/α^2 направление вектора Пойнтинга определяется вектором

$$\mathbf{s}_0^{\pm}=\mathbf{e}+\frac{\beta}{\alpha}\,\mathbf{a}_{\pm}\,(\mathbf{e}\,[\mathbf{qp}])\,(\pm\operatorname{ctg}(\widehat{\mathbf{e},\mathbf{q}})-\operatorname{ctg}(\widehat{\mathbf{e},\mathbf{p}})).$$

Подчеркнем, что формулы (6)—(12) были получены при помощи разложения векторов в базисе $\{\mathbf{e},\ [\mathbf{eq}'],\ [\mathbf{ep}']\}$, которое законно, только если $\mathbf{e}$ не лежит в плоскости $(\mathbf{q},\ \mathbf{p})$. Этим обусловлены соответствующие неопределенности в указанных формулах, возникающие при подстановке в них $\mathbf{e}$ $(\mathbf{k})$, принадлежащих плоскости $(\mathbf{q},\ \mathbf{p})$.

Случай $\mathbf{e}$, компланарного с $\mathbf{q}$ и $\mathbf{p}$, необходимо разобрать отдельно. Оказывается, что в этой ситуации также возможно распространение двух типов волн: 1) «обыкновенных» волн, имеющих показатель преломления $n_0^2=1/\alpha'=\alpha$ и поляризацию $\mathbf{a}_0=\dfrac{[\mathbf{p}'\mathbf{q}']}{\sin(\widehat{\mathbf{p}',\mathbf{q}'})}=\dfrac{[\mathbf{pq}]}{\sin(\widehat{\mathbf{p},\mathbf{q}})}$; 2) «необыкновенных» волн с показателем преломления

$$n_e^{-2}=\begin{cases}\alpha'+\beta'\,((\mathbf{q}'\mathbf{p}')-\cos(\widehat{\mathbf{e},\mathbf{q}'}+\widehat{\mathbf{e},\mathbf{p}'})), & \text{если } \mathbf{e} \text{ лежит между } \mathbf{q}' \text{ и } -\mathbf{p}' \text{ или } \mathbf{p}' \text{ и } -\mathbf{q}';\\ \alpha'+\beta'\,((\mathbf{q}'\mathbf{p}')-\cos(\widehat{\mathbf{e},\mathbf{q}'}-\widehat{\mathbf{e},\mathbf{p}'})), & \text{если } \mathbf{e} \text{ лежит между } \mathbf{q}' \text{ и } \mathbf{p}' \text{ или } -\mathbf{q}' \text{ и } -\mathbf{p}'\end{cases}$$

и поляризацией $\mathbf{a}_e=\dfrac{[\mathbf{e}\,[\mathbf{p}'\mathbf{q}']]}{\sin(\widehat{\mathbf{p}',\mathbf{q}'})}=\dfrac{[\mathbf{e}\,[\mathbf{pq}]]}{\sin(\widehat{\mathbf{p},\mathbf{q}})}$. Из (4) видно, что если $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{q}_2$, $\mathbf{p}_2$ лежат в одной плоскости, то и $\Delta\mathbf{D}_{q,\mathbf{k}}^{tr}$ лежит в этой плоскости. Поэтому если лучевые оси до и после скачка лежат в одной плоскости (заметим, что оптические оси всегда лежат в той же плоскости, что и лучевые), например если меняется только степень анизотропии, то «обыкновенные» волны неподвижными зарядами не излучаются (ср. [5]).

Энергия излучения в рассматриваемом случае может быть вычислена по формуле (10), в которой индексы (+) и (—) надо заменить на (0) и (e). Если меняется только степень анизотропии среды и β_1, $\beta_2\ll\alpha$, то для нахождения интенсивности излучения можно воспользоваться (11), где знак $\cos(\widehat{\mathbf{e},\mathbf{q}}\pm\widehat{\mathbf{e},\mathbf{p}})$ надо выбирать так, чтобы выражение $(\mathbf{qp})-\cos(\widehat{\mathbf{e},\mathbf{q}}\pm\widehat{\mathbf{e},\mathbf{p}})$ не обращалось в нуль.

В направлении лучевых осей могут распространяться только «обыкновенные» волны, поэтому если оси до и после скачка компланарны, то в этих направлениях излучения нет. Точнее, в направлении $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ излучаются «необыкновенные» волны малой $(\sim\beta^2/\alpha^2)$ энергии. Нулю же равно излучение в направлении оптических осей $\mathbf{p}'$, $\mathbf{q}'$, которые лежат в плоскости $(\mathbf{p},\ \mathbf{q})$ и близки (отклонение $\sim\beta/\alpha$) к $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ соответственно.

Вектор Пойнтинга в случае компланарных $\mathbf{e}$, $\mathbf{q}$ и $\mathbf{p}$ направлен по ортам

$$\mathbf{s}_0^{(0)}=\mathbf{e}\ \text{ и }\ \mathbf{s}_0^{(e)}\simeq\mathbf{e}+\frac{\beta}{\alpha}\,\frac{[\mathbf{e}\,[\mathbf{qp}]]}{\sin^2(\widehat{\mathbf{q},\mathbf{p}})}\,((\mathbf{ep})^2-(\mathbf{eq})^2)$$

для «обыкновенных» и «необыкновенных» волн соответственно.

Независимость энергии излучения от частоты вызвана представлением о том, что время $T_и$ изменения свойств среды пренебрежимо мало. Это справедливо для волн частоты $\omega\ll1/T_и$. Как показано в [6], на частотах $\omega\gg1/T_и$ спектр должен спадать экспоненциально.

Рассмотренное излучение должно возникать, например, при деформации диэлектрика, при помещении одноосного кристалла в сильное электрическое поле, а также при использовании других способов изменения анизотропных свойств среды во времени. Условием генерации при этом является наличие в среде макроскопического заряда.

В заключение автор благодарит В. А. Давыдова за ценные обсуждения и интерес к работе, Б. М. Болотовского и С. Н. Столярова за полезное обсуждение полученных результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Манева Г. М.//Кр. сообщ. по физике ФИАН СССР. 1977. № 2. С. 21—25. [2] Давыдов В. А.//ЖТФ. 1982. 52, № 12. С. 2340—2344. [3] Федоров Ф. И. Оптика анизотропных сред. Минск, 1958. [4] Гинзбург В. Л., Цытович В. Н.// //ЖЭТФ. 1973. 65, № 1. С. 132—144. [5] Давыдов В. А.//Изв. вузов. Радиофизика. 1980. 23, № 8. С. 982—987. [6] Болотовский Б. М., Давыдов В. А., Рок В. Е.//УФН. 1982. 136, № 3. С. 501—518.

Поступила в редакцию
02.10.85

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1986. Т. 27, № 6

УДК 530.1:530.12:531.51

МНОГОМЕРНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ МОДЕЛИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ И СЛАБЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ ВАЙНБЕРГА—САЛАМА С ГРАВИТАЦИЕЙ: БОЗОННЫЙ СЕКТОР

В. В. Кислов

(кафедра теоретической физики)

1. Идея объединения фундаментальных физических взаимодействий в рамках теорий типа Калуцы—Клейна [1, 2] привлекает в последнее время пристальное внимание. При рассмотрении римановой геометрии в пространстве $4+N$ измерений и последующей компактификации дополнительных N измерений лагранжиан теории распадается на сумму гравитационного лагранжиана и лагранжиана дополнительных полей с размерностью калибровочной группы (в общем случае неабелевой) N [1].

Однако оказывается, что бозонный сектор модели Вайнберга—Салама ($N=\dim SU(2)\times U(1)=4$) [3] можно геометрически описать уже в рамках *6-мерной* римановой геометрии. Ключевую роль при этом играет обобщение зависимости от дополнительных координат в 6-метрике по сравнению с [1, 4].

2. Зададим бозонную часть исходного лагранжиана в виде

$$^6\mathcal{L}_B=\sqrt{-G^*}\left\{\frac{1}{2\varkappa}\,{}^6R^*+\Lambda^*\right\}, \qquad (1)$$

где $\sqrt{-G^*}$ — корень из определителя 6-мерного метрического тензора $\overset{*}{G}_{AB}$, ${}^6R^*$ — скалярная кривизна рассматриваемого 6-мерного многообразия, $\varkappa=8\pi k/c^4$, k — ньютоновская гравитационная постоянная, Λ^* — космологическая «постоянная». Спинорная материя может быть введена внешним образом, включением соответствующих членов в бозонный лагранжиан (1). При этом вводимый внешним образом в 6-мерной теории 8-компонентный спинор [5] расщепляется на пару 4-компонентных спиноров, соответствующих электрону и нейтрино.