стические волны, распространяющиеся в направлении нормали к поверхности [4, 6—8]. Отметим в связи с этим, что первое слагаемое в выражении (17) описывает то поле, в которое переходит поле (17), (18), в случае предельного перехода от твердого тела к жидкости, т. е. при $\mu \to 0$.

На рис. 3 приведены экспериментальные характеристики направленности продольных волн, возбуждаемых лазерным пучком конечной ширины a с равномерным распределением интенсивности [2]. Здесь же изображены соответствующие теоретические зависимости, рассчитанные по формуле (17). Как нетрудно видеть, между теорией и экспериментом наблюдается достаточно хорошее согласие. Некоторое расхождение в случае широкого пучка (рис. 3, *б*) может быть объяснено изрезанностью профиля реального лазерного пучка, использовавшегося в экспериментах работы [2], и его цилиндрической симметрией.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Ash E. A., Dieulesaint E., Rakouth H.//Electronics Lett. 1980. **16**, N 12. P. 470—472. [2] Hutchins D. A., Dewhurst R. J., Palmer S. B.//J. Acoust. Soc. Am. 1981. **70**, N 5. P. 1362—1369. [3] Scruby C. B., Dewhurst R. J., Hutchins D. A., Palmer S. B.//Res. Techn. Nondestruct. Test. V. 5. London, 1982. P. 282—327. [4] Руденко О. В., Черепецкая Е. Б.//Тез. докл. V Всесоюз. совещ. по нерезонанс. взаимодействию оптич. излучения с веществом. Л., 1981, с. 373—374. [5] Архипов В. И., Бондаренко А. Н., Кондратьев А. И.// //Акуст. журн. 1982. **28**, № 3. С. 303—310. [6] Крылов В. В., Павлов В. И.// //Материалы XI Всесоюз. конф. по акустоэлектронике и квантовой акустике. Ч. 1. Душанбе, 1981. С. 200—201. [7] Крылов В. В., Павлов В. И.//Акуст. журн. 1982. **28**, № 6. С. 836—837. [8] Лямшев Л. М., Челноков Б. И.// Там же. 1983. **29**, № 3. С. 372—381. [9] Дыхне А. М., Рысев Б. П.//Поверхность. 1983. № 6. С. 17—21. [10] Rose L. R. F.//J. Acoust. Soc. Am. 1984. **75**, N 3. P. 723—732. [11] Буденков Г. А., Бойко М. С.//Дефектоскопия. 1984. № 3. С. 16—24. [12] Lapwood E. R.//Phil. Trans. Roy. Soc. London. 1949. **A242**. P. 63—100. [13] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. М., 1965. [14] Новацкий В. Теория упругости. М., 1975. [15] Золотов С. И., Крылов В. В., Пономарев Е. П., Штенцель Т. В.//Акуст. журн. 1985. **31**, № 4. С. 569—571.

Поступила в редакцию
01.08.85

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1986. Т. 27, № 6

УДК 534

СПЕКТР ШУМОВОГО ДИФРАГИРУЮЩЕГО ПУЧКА: ЛИНЕЙНОЕ И НЕЛИНЕЙНОЕ РАСПРОСТРАНЕНИЕ

Б. С. Азимов, М. М. Сагатов, О. В. Руденко

(кафедра общей физики и волновых процессов)

Главные особенности дифракции акустических волн связаны с существованием широкополосных спектров. Поскольку низкочастотные компоненты дифрагируют быстрее высокочастотных, при распространении волны ее спектр, например вблизи оси пучка, непрерывно искажается. Еще более сложная картина возникает в случае мощных пучков, описание которых требует учета также и нелинейности. В результате взаимодействия фурье-компонент происходит «растекание» энергии по спектру; рождаются новые спектральные участки как в области низких, так и в области высоких частот, которые дифрагируют по-разному. Эти процессы неплохо изучены для регулярных волн [1, 2]. В то же время дифракция волн, модулированных случайным образом, остается практически не исследованной.

Распространение акустических пучков в нелинейных средах описывается уравнением Хохлова—Заболотской:

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left[\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\varepsilon}{c_0^2}U\frac{\partial U}{\partial \tau}\right]=\frac{c_0}{2}\,\Delta_\perp U, \tag{1}$$

где U — колебательная скорость, z — координата вдоль оси распространения, $\Delta_\perp$ — лапласиан по поперечным координатам r, $\tau=t-z/c_0$, ε — параметр нелинейности, c_0 — скорость звука. Для описания эволюции волн, случайно модулированных во времени и в пространстве, введем корреляционную функцию — момент второго порядка:

$$B(z,\ \tau_1,\ \tau_2,\ \mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2)=\langle U(z,\ \tau_1,\ \mathbf{r}_1)\,U(z,\ \tau_2,\ \mathbf{r}_2)\rangle. \tag{2}$$

Линейное распространение. В линейном приближении ($\varepsilon\to 0$) поведение характеристик стационарного процесса описывается уравнениями, отвечающими динамическому уравнению (1):

$$\frac{\partial^2 B}{\partial z\,\partial T}=c_0\frac{\partial^2 B}{\partial \mathbf{r}\,\partial \mathbf{R}};\quad i\omega\frac{\partial S}{\partial z}=c_0\frac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{r}\,\partial \mathbf{R}}. \tag{3}$$

Здесь $\mathbf{r}=\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2$, $\mathbf{R}=(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2)/2$, $B(z,\ T=\tau_1-\tau_2,\ \mathbf{r},\ \mathbf{R})$ — корреляционная функция и $S(z,\ \omega,\ \mathbf{r},\ \mathbf{R})=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}B\exp(-i\omega T)\,dT$ — спектр интенсивности стационарного случайного процесса.

Рассмотрим важный пример, иллюстрирующий особенности дифракции шумовых волн с широким спектром. Пусть исходная корреляционная функция

$$B(z=0,\ T,\ \mathbf{r},\ \mathbf{R})=e^{-r^2/r_\text{к}^2-R^2/R_0^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}S_0(\omega)\,e^{i\omega T}\,d\omega \tag{4}$$

соответствует пучку с гауссовской поперечной корреляцией (радиус корреляции $r_\text{к}$) и средней интенсивностью, распределенной также по гауссовскому закону (радиус пучка R_0); $S_0(\omega)$ — исходный спектр шума. Решение задачи (3), (4) имеет вид

$$S(z,\ \omega,\ \mathbf{r},\ \mathbf{R})=\frac{S_0(\omega)}{1+z^2/L_\text{д}^2(\omega)}\exp\left[-2i\frac{z/L_\text{д}(\omega)}{1+z^2/L_\text{д}^2(\omega)}\frac{r}{r_\text{к}}\frac{R}{R_0}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{1+z^2/L_\text{д}^2(\omega)}\left(\frac{R^2}{R_0^2}+\frac{r^2}{r_\text{к}^2}\right)\right]. \tag{5}$$

Здесь $L_\text{д}(\omega)=\omega r_\text{к}R_0/2c_0$ — характерная дифракционная длина для данной частотной компоненты. Видно, что взаимный спектр (5) — комплексная функция.

Если интересоваться спектром интенсивности, измеренным в одной точке пространства, нужно положить $\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2$, т. е. $\mathbf{r}=0$. При этом из (5) получается более простое выражение для действительной функции $S(z,\ \omega,\ 0,\ \mathbf{R})$. Когда исходный спектр гауссов: $S_0=(U_0^2\tau_\text{к}/2\sqrt{\pi})\times$

$\times \exp(-\omega^2\tau_к^2/4)$ и отвечает временной корреляционной функции $B_t = U_0^2 \exp(-T^2/\tau_к^2)$, спектр интенсивности равен

$$S = \frac{U_0^2 \tau_к}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\Omega^2}{4}\right) \frac{\Omega^2}{\Omega^2 + z^2/L_д^2} \exp\left(-\frac{\Omega^2}{\Omega^2 + z^2/L_д^2} \frac{R^2}{R_0^2}\right). \qquad (6)$$

В формуле (6) введена не зависящая от частоты эффективная дифракционная длина $L_д = 2c_0\tau_к/r_к R_0$; $\Omega = \omega\tau_к$.

Если использовать протяженный приемник, интегрирующий (6) по всему фронту волны, то при любых расстояниях z сигнал на приемнике будет $\pi R_0^2 S_0(\Omega)$. Вывод очевиден: в линейном приближении не происходит энергообмена между спектральными компонентами, они лишь по-разному перераспределяются в пространстве.

Если же использовать точечный приемник, поместив его на оси $R=0$, спектр (6) будет деформироваться с увеличением z. Так, на излучателе $(z=0)$ $\tilde{S} = (2\sqrt{\pi}/U_0^2\tau_к) S = \exp(-\Omega^2/4)$, а в дальней зоне $(z \gg L_д)$ спектр $\tilde{S} = (L_д^2/z^2)\Omega^2 \exp(-\Omega^2/4)$. Максимум $\tilde{S}$ с увеличением расстояния z непрерывно смещается вверх по спектру; если при $z=0$ он находился при $\Omega_{max}=0$, то при $z \to \infty$ $\Omega_{max} \to 2$. На нулевой частоте $\Omega=0$ образуется провал, так как низкие частоты дифрагируют очень быстро.

Если точечный приемник имеет широкую частотную характеристику и интегрирует по всему спектру шума, можно измерить полную интенсивность процесса:

$$I(z) = \int_0^\infty S(z, \omega, 0, 0)\, d\omega = U_0^2 \left\{1 - \sqrt{\pi} \frac{z}{2L_д} e^{\left(\frac{z}{2L_д}\right)^2} \left[1 - \Phi\left(\frac{z}{2L_д}\right)\right]\right\}. \qquad (7)$$

Здесь Φ — интеграл ошибок. Из-за дифракции полная интенсивность на оси пучка убывает: при $z \ll 2L_д$ — по линейному закону $I = (U_0^2/2) \times (1 - \sqrt{\pi} \cdot z/2L_д)$, а при $z \gg 2L_д$ — как $I = (U_0 L_д/z)^2$.

Нелинейное распространение. В случае распространения достаточно мощных акустических пучков формула (5) становится неточной. Для получения искомой корреляционной функции (2) необходимо решать нелинейное уравнение (1). При помощи неявной замены переменных [3]: z, $\mathbf{r}$, $t \Rightarrow z$, $\mathbf{r}$, $\eta = t + (\varepsilon/c_0^2) z U(z, t, \mathbf{r})$, когда профиль волны достаточно гладкий $(1 \gg (\varepsilon/c_0^2) z |\partial U/\partial\eta|)$, можно линеаризовать уравнение (1). Последующее использование формализма преобразований Фурье приводит к следующему виду спектральной интенсивности нормального (на входе) процесса:

$$S = \frac{1}{2\pi i\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial K}{\partial T} e^{-\left(\frac{\varepsilon}{c_0^2}\omega z\right)^2 (\sigma^2 - K) - i\omega T} dT. \qquad (8)$$

В формуле (8) спектральная интенсивность S есть фурье-образ к реальной корреляционной функции процесса (2), в то время как K и ее дисперсия $\sigma^2 = K$ $(T=0)$ играют роль вспомогательных корреляционных характеристик: $K = K(z, \mathbf{r}, \mathbf{R}, \eta_2 - \eta_1)$, $K(z=0) = B(z=0)$.

Функция K находится из решения линеаризованного уравнения (1). В случае гауссовской начальной функции (4) и $S_0 = (U_0^2\tau_к/2\sqrt{\pi}) \exp(-\omega^2\tau_к^2/4)$ имеем

$$K=U_0^2\left\{e^{-T^2}-\frac{\sqrt{\pi}}{4}ze^{\left(\frac{z}{2}\right)^2}\left\{e^{-zT}\left[1-\Phi\left(\frac{z}{2}-T\right)\right]+\right.\right.$$

$$\left.\left.+e^{zT}\left[1+\Phi\left(\frac{z}{2}+T\right)\right]\right\}\right\}. \qquad (9)$$

В формуле (9) введена нормировка: $z \to z/L_д$, $T \to T/\tau_к$.

Численные эксперименты. Эволюция спектральной интенсивности пучков была проанализирована при помощи численного интегрирования формулы (8). При этом использовался безразмерный параметр $N=L_д/L_p$ (L_p — характерная нелинейная длина образования разрыва), z нормирована на $L_д$, $L_p=c_0{}^2\tau_к/\varepsilon U_0$.

На рис. 1 показана эволюция спектра на оси пучка, обладающего гауссовской входной корреляционной функцией (4), $S_0=(U_0{}^2\tau_к/2\sqrt{\pi})\times$ $\times\exp(-\omega^2\tau_к{}^2/4)$. Здесь и далее симметрия спектра относительно нулевой частоты позволяет рассматривать его правую половину $\omega>0$. При значении $N=10$ обнаруживается практически линейный характер распространения волны. В этом случае качественные особенности дифракции случайно модулированных волн полностью совпадают с поведением регулярных возмущений: более высокие темпы дифракции низкочастотной области спектра на начальном этапе распространения приводят к сдвигу максимума в область высоких частот ($z=0{,}1\div1$). Затем пучок переходит в зону сферической дифракции и сдвиг спектрального максимума практически прекращается. Начиная с этого этапа ($z\geqslant3{,}0$), наблюдается стабилизация формы спектра, сопровождающаяся равномерным убыванием интенсивности спектра на всех частотах ($z\gg3{,}0$ на рис. 1).

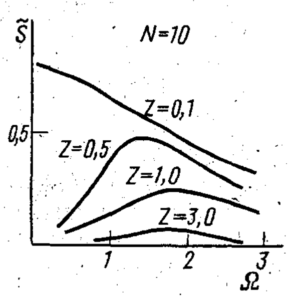

Рис. 1

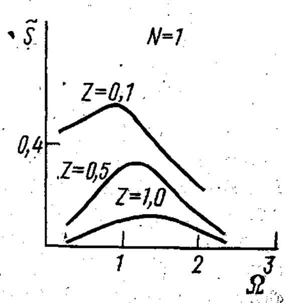

Рис. 2

Увеличение входной интенсивности существенно меняет характер процесса. На рис. 2 показана динамика эволюции спектра на оси пучка при $N=1$ ($L_д=L_p$). Из сравнения с рис. 1 следует, что сдвиг спектрального максимума существенно замедляется. Вообще говоря, нелинейная эволюция объясняется конкуренцией двух процессов: с одной стороны, существует неравномерная (в ближней зоне) дифракция спектральных компонент, с другой стороны, каскадная генерация суммарных и разностных частотных компонент. Замедление «дрейфа» спектра вправо, проиллюстрированное на рис. 2, объясняется генерацией низкочастотных компонент. В то же время общие дифракционные потери возрастают, так как в «быстрой» низкочастотной дифракции участвует уже большая доля энергии пучка.

Увеличивая нелинейность процесса, можно подобрать условия точного баланса (в ближней зоне) между дифракцией и параметрической подкачкой энергии вниз, при которых центр спектра будет стабилизирован. Численные расчеты показывают, что при значении параметра $N=0{,}33$ практически сразу ($z\approx0{,}1$) происходит стабилизация спектра (рис. 3).

Скорость убывания интенсивности в прожекторной зоне при нелинейном распространении выше, чем в линейном случае. Это объясняется следующим: дифракция низких частот существенно сильнее дифракции высокочастотной области спектра. Нелинейность процесса вызывает растекание энергии по всему спектру, и, следовательно, часть энергии переходит в низкочастотную область. Эта энергия практически мгновенно дифрагирует, т. е. появляется дополнительный канал низкочастотных потерь.

При $N<0{,}33$ (рис. 4) максимум спектра смещается не вправо, как это происходит в линейном и слабонелинейном случаях, а влево, в сторону низких частот. Продолжая интерпретировать характер эволюции спектра конкуренцией дифракции и нелинейной генерации, это изменение объясним превышением перекачки энергии в низкочастотную область спектра над соответствующими дифракционными потерями.

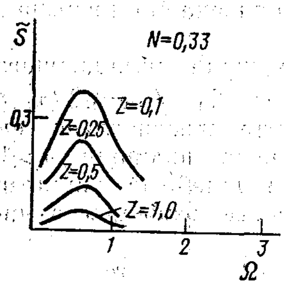

Рис. 3

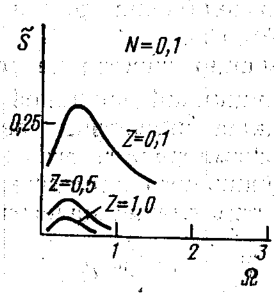

Рис. 4

Существует два возможных сценария окончания нелинейной фазы распространения пучков при сильной начальной нелинейности процесса ($N<0{,}33$). Если пучок переходит в область сферической дифракции до того, как убывание интенсивности ограничит нелинейное растекание энергии по спектру, то произойдет стабилизация положения спектра на оси частот ($z \gg 1$ на рис. 4). В противном случае будет наблюдаться изменение направления частотного «дрейфа» и спектр будет сдвигаться в высокочастотную область, пока не будет остановлен наступлением сферической дифракции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Бахвалов Н. С., Жилейкин Я. М., Заболотская Е. А. Нелинейная теория звуковых пучков. М., 1982. [2] Васильева О. А., Карабутов А. А., Лапшин Е. А., Руденко О. В. Взаимодействие одномерных волн в средах без дисперсии. М., 1983. [3] Лапидус Ю. Р., Руденко О. В.//Акуст. журн. 1984. 30, № 6. С. 797—802.

Поступила в редакцию
03.10.85

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1986. Т. 27, № 6

УДК 53:51

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ ДЛЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА В БОРНОВСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

В. А. Буров, Т. А. Тихонова

(кафедра акустики)

Решение обратной задачи рассеяния для твердого тела представляет большой интерес прежде всего для дефектоскопии. Методы обработки данных о рассеянии акустических волн на неоднородностях в твердом теле, разработанные на основе решения обратной задачи рас-