КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 517.91/943

КВАЗИНОРМАЛЬНЫЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ РЕЖИМЫ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Г. Н. Медведев, Б. И. Моргунов

(кафедра математики)

Рассматриваются колебания звеньев манипуляторных устройств. Для описания движения используются уравнения Лагранжа второго рода. Из-за наличия запаздывания в управлении движением манипулятора моменты и усилия, развиваемые двигателями, могут зависеть от значений обобщенных координат и обобщенных скоростей, взятых как в текущий, так и в предшествующие моменты времени. Рассматривая результирующие перемещения манипулятора как комбинацию программных движений и малых быстрых колебательных движений, мы приходим к следующей системе существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка с отклоняющимся аргументом для определения функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$, описывающих колебательные режимы:

$$\sum_j a_{ij}(\tau)\frac{d^2y_j}{dt^2}+\frac{\partial V}{\partial y_i}=\varepsilon f_i(\tau, y, \tilde{y}, \dot{y}, \tilde{\dot{y}}, \theta), \quad \frac{d\theta}{dt}=\nu(\tau), \quad i, j=\overline{1, n}. \tag{1}$$

В (1) a_{ij} — элементы симметричной невырожденной матрицы, V — четная однородная функция $y_1, \ldots, y_n$; для определенности полагаем

$$V(\tau, y_1, \ldots, y_n)=\sum \varkappa_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(\tau) y_1^{\alpha_1}\ldots y_n^{\alpha_n}$$

$$\alpha_1+\ldots+\alpha_n=4$$

$$\alpha_i=0,1, \ldots, 4$$

(a_{ij} и V характеризуют соответственно кинетическую энергию и потенциальную энергию упругих сил); t — «быстрое» время, описывающее колебания звеньев манипулятора; $\tau=\varepsilon t$ — «медленное» время, характеризующее программное движение механизма; $\varepsilon>0$ — малый параметр; $\tilde{y}\equiv y(t-\Delta)$, $\tilde{\dot{y}}\equiv \dot{y}(t-\Delta)$, где $\Delta>0$ — постоянное запаздывание.

Сходные системы дифференциальных уравнений без запаздывания исследовались в задачах динамики манипуляторов с учетом податливости шарниров [1].

Положим в (1) $\varepsilon=0$, в результате чего получим

$$\sum_j a_{ij}(\tau)\frac{d^2y_j^0}{dt^2}+Q_i(\tau, y_1^0, \ldots, y_n^0)=0, \quad Q_i=\frac{\partial V}{\partial y_i^0}, \quad \tau=\mathrm{const}, \quad i, j=\overline{1, n}. \tag{2}$$

Рассмотрим нормальные колебательные режимы порождающей системы (2) вида

$$y_j^0=k_j(\tau)y_1^0, \quad k_1\equiv 1, \quad j=\overline{1, n} \tag{3}$$

(см., например, [2]).

Подставляя (3) в (2), получаем

$$\frac{d^2y_1^0}{dt^2}\sum_j a_{ij}k_j+Q_i(\tau, k_1y_1^0, \ldots, k_ny_1^0)=0,$$

откуда, исключая $d^2y_1^0/dt^2$, находим алгебраическую систему уравнений для определения $k_2(\tau), \ldots, k_n(\tau)$:

$$Q_1(\tau, k_1y_1^0, \ldots, k_ny_1^0)\sum_j a_{ij}k_j = Q_i(\tau, k_1y_1^0, \ldots, k_ny_1^0)\sum_j a_{1j}k_j \qquad (4)$$

и дифференциальное уравнение для определения функции y_1^0:

$$\frac{d^2y_1^0}{dt^2}\sum_j a_{1j}k_j + Q_1(\tau; y_1^0, k_2y_1^0, \ldots, k_ny_1^0) = 0. \qquad (5)$$

Пусть $y_1^0=\varphi(\tau, F, \psi)$ — периодическое решение (5), функция φ периодична по ψ с периодом T, $\psi=\omega(F, \tau)(t-t_0)+h$ $(h=\mathrm{const})$,

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad T = 4\int_0^F dy/\sqrt{2[V(F,\tau)-V(y,\tau)]}. \qquad (6)$$

При $\varepsilon\neq 0$ режимам типа (3) порождающей системы (2) могут соответствовать квазинормальные режимы системы (1) вида

$$y_i=k_1(\tau)\varphi(\tau, F, \psi),$$
$$\dot y_i = k_i(\tau)\omega(F, \tau)\frac{\partial\varphi(\tau, F, \psi)}{\partial\psi}, \quad k_1\equiv 1, \quad i=\overline{1, n}. \qquad (7)$$

Сходные режимы для квазилинейных возмущенных систем рассмотрены в [3]. В (7) F, ψ — некоторые функции времени, для которых получается следующая система (см. [3]), принадлежащая к типу систем с медленными переменными и быстрыми фазами:

$$\frac{dF}{dt} = \varepsilon X(\tau, F, \widetilde{F}, \psi, \widetilde{\psi}, \theta),$$
$$\frac{d\psi}{dt} = \omega(F, \tau) + \varepsilon\Psi(\tau, F, \widetilde{F}, \psi, \widetilde{\psi}, \theta), \qquad (8)$$
$$\frac{d\theta}{dt} = \nu(\tau),$$

где

$$X = \frac{1}{mD}\left[-\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\sum_i k_if_i + \frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\sum_{i,j}a_{ij}k_i\frac{\partial}{\partial\tau}\left(k_j\omega\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\right) - \right.$$
$$\left. -\ \omega\frac{\partial^2\varphi}{\partial\psi^2}\sum_{i,j}a_{ij}k_j\frac{\partial}{\partial\tau}(k_i\varphi)\right],$$

$$\Psi = \frac{1}{mD}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial F}\sum_i k_if_i - \frac{\partial\varphi}{\partial F}\sum_{i,j}a_{ij}k_i\frac{\partial}{\partial\tau}\left(k_j\omega\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\right) + \right.$$
$$\left. +\ \frac{\partial}{\partial F}\left(\omega\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\right)\sum_{i,j}a_{ij}k_j\frac{\partial}{\partial\tau}(k_i\varphi)\right],$$

$$D = \omega\frac{\partial\varphi}{\partial F}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\psi^2} - \frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\frac{\partial}{\partial F}\left(\omega\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\right) \equiv D(F, \tau),$$

$$m = \sum_{i,j}a_{ij}(\tau)k_i(\tau)k_j(\tau),$$

$$\widetilde{F} \equiv F(t-\Delta), \quad \widetilde{\psi} \equiv \psi(t-\Delta).$$

Рассмотрим для определенности основной резонансный режим в системе (8), характеризующийся соотношением $\omega(F, \tau)\approx\nu(\tau)$. Вводя для этого случая фазовую расстройку $\eta=\psi-\theta$, получим

$$\frac{dF}{dt}=\varepsilon X(\tau, F, \widetilde{F}, \psi, \widetilde{\psi}, \psi-\eta),$$

$$\frac{d\eta}{dt}=\lambda(F, \tau)+\varepsilon\Psi(\tau, F, \widetilde{F}, \psi, \widetilde{\psi}, \psi-\eta), \tag{9}$$

$$\frac{d\psi}{dt}=\omega(F, \tau)+\varepsilon\Psi(\tau, F, \widetilde{F}, \psi, \widetilde{\psi}, \psi-\eta),$$

$$\lambda(F, \tau)\equiv\omega(F, \tau)-\nu(\tau).$$

Как следует из (9), величины $F-\widetilde{F}$, $\varphi-\widetilde{\varphi}-\lambda\Delta$ и $\psi-\widetilde{\psi}-\omega\Delta$ относительно малы. Поэтому можно приближенно свести систему (9) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. К полученной системе обыкновенных дифференциальных уравнений можно применить известную процедуру построения стационарных резонансных режимов (см., например, [4]). Так, стационарные резонансные значения $F_0(\tau)$, $\eta_0(\tau)$ величин F, η определяются из следующей системы уравнений:

$$\overline{X}(\tau, F_0, \eta_0)=\frac{dF_0}{d\tau}, \quad \lambda(F_0, \tau)=0, \tag{10}$$

где

$$\overline{X}(\tau, F, \eta)\equiv\frac{1}{T}\int_0^T X(\tau, F, F, \psi, \psi-\omega\Delta, \quad \psi-\eta)d\psi \tag{11}$$

— среднее значение функции X по быстрой фазе ψ.

Определенный соотношениями (10) резонансный режим устойчив на асимптотически большом интервале времени при выполнении некоторых достаточных условий, аналогичных приведенным в [4].

После определения функций $F_0(\tau)$, $\eta_0(\tau)$ можно приближенно описать процесс малых быстрых колебаний звеньев манипулятора с помощью формул преобразования (7).

Рассмотрим теперь случай, когда возмущения εf_i в (1) не зависят явно от θ. Пусть по-прежнему порождающая система (2) допускает решения вида (3), где $k_j(\tau)$ определяются из (4), $y_1{}^0=\varphi(\tau, F, \psi)$ — периодическое решение (2) с периодом (6). Производя в (1) замену (7), придем к системе типа (8), причем теперь правые части не зависят явно от θ. Усредняя правые части (8) по формуле (11), где теперь подынтегральная функция не содержит последнего аргумента, придем к усредненному уравнению первого приближения $dF/d\tau=\overline{X}(F, \tau)$. Из этого уравнения определяется зависимость медленно изменяющейся амплитуды $F(\tau)$ от параметра τ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Гориневский Д. М.//Механика твердого тела. 1983. № 6. С. 43—48. [2] Блакьер О. Анализ нелинейных систем. М., 1969. [3] Митропольский Ю. А. Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний. М., 1964. [4] Волосов В. М., Моргунов Б. И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М., 1971.

Поступила в редакцию
30.09.85