(рис. 4, *а*). Надежность соответствующей объединенной модели еще достаточно велика — примерно 0,6, а качество редукции удовлетворительное (рис. 4, *б*). Отметим, что область влияния охватывает и центр графика, где удается снизить шум редукции.

Наконец, предположим, что П-образного импульса не существует, что формализуем в виде $f_0=0$, $F_0=I$, $\alpha=0,01$ для схемы $f_0=f+\nu'$ (рис. 5, *а*). Оказывается, что в этом случае надежность модели, объединяющей исходную схему измерений и такие дополнительные данные, крайне мала ($\sim 0{,}001$), и принятое предположение об f необходимо отвергнуть как противоречащее измерению ξ. Такая ситуация может возникнуть, например, когда исследователь ошибается в определении местоположения или формы импульса. Заметим, что результат, полученный с использованием ошибочной дополнительной информации (рис. 5, *б*), при достаточно высокой точности сильно отличается от тестового сигнала в центральной области.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Пытьев Ю. П. // Матем. сб. 1982. **118(160)**, № 1(5). С. 19—49. [2] Пытьев Ю. П. // Матем. сб. 1983. **120(162)**, № 2. С. 240—272. [3] Пытьев Ю. П. Возможности измерительно-вычислительного комплекса при планировании, анализе и интерпретации измерений: лекции для молодых ученых ОИЯИ. № Р 10-84-525. Дубна, 1984. [4] Пытьев Ю. П. // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3, Физ. Астрон. 1986. **27**, № 3. С. 14—19.

Поступила в редакцию
18.09.85

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1987. Т. 28, № 1

УДК 530.145:530.12

ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ УДВОЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ

Ю. Г. Павленко, С. И. Зеленский

(кафедра теоретической физики)

Гамильтоновы системы занимают весьма важное место в теоретической и математической физике. С одной стороны, они описывают множество явлений в классических и квантовых теориях. С другой стороны, канонический формализм позволяет развить универсальные методы интегрирования систем нелинейных уравнений [1—8].

В общепринятом подходе уравнения Лагранжа и Гамильтона эквивалентны, поскольку преобразование Лежандра реализует переход от обобщенных координат и скоростей к фазовому пространству координат и импульсов [2, 8—10]. Лагранжевы уравнения представляют экстремали функционала действия. Однако произвольные системы не являются уравнениями Лагранжа—Эйлера вариационной задачи на безусловный экстремум для некоторого функционала [11, 12]. Поэтому сложилось убеждение, что если система не имеет лагранжевой формы, то переход к гамильтоновым уравнениям невозможен. Например, в механике системы, учитывающие силы трения, считаются негамильтоновыми. То же относится к уравнениям, описывающим химические реакции или различные экологические модели, сингулярно-возмущенным уравнениям в теориях движения плазмы, жидкости и газа. Негамильтонов характер этих систем заставляет в каждом конкретном случае искать специальные методы решения.

В настоящей работе показано, что любую общую систему можно представить в гамильтоновой форме. После этого шага решение может быть получено на основе мощных методов интегрирования канонических систем. В качестве примеров рассмотрено интегрирование уравнений движения материальной точки, уравнения Кеплера, развита гамильтонова теория специальных функций.

1. **Метод удвоения переменных.** Рассмотрим систему нелинейных уравнений

$$\frac{dx_\mu}{dt}=f_\mu(x,\ t),\quad \mu=1,\ \ldots,\ s. \tag{1}$$

Введем далее пространство R^{2s} с координатами $z_\mu=x_\mu$, $z_{\mu+s}=p_\mu$ и невырожденной метрикой $\Omega^{\alpha\beta}$, в котором определим скобку Пуассона (СП) функций $A(z)$ и $B(z)$

$$[A,\ B]=\Omega^{\alpha\beta}\frac{\partial A}{\partial z_\alpha}\frac{\partial B}{\partial z_\beta},\quad \Omega^{\alpha\beta}=\begin{pmatrix}0 & E\\ -E & 0\end{pmatrix},\quad \alpha,\ \beta=1,\ \ldots,2s.$$

Здесь E — единичная s-мерная матрица. Если в качестве гамильтониана выбрать функцию

$$H(z,\ t)=p_\mu f_\mu(x,\ t), \tag{2}$$

то уравнения Гамильтона $\dot{z}_\alpha=[z_\alpha,\ H]$ приобретают вид

$$\dot{x}_\mu=[x_\mu,\ H]=f_\mu(x,\ t), \tag{3}$$

$$\dot{p}_\mu=[p_\mu,\ H]=-p_\nu\frac{\partial f_\nu(x,\ t)}{\partial x_\mu}. \tag{4}$$

Уравнения (3) совпадают с (1), а (4) представляют собой ассоциированную систему. Уравнения (3), (4) являются экстремалями функционала

$$I(x,\ p)=\int dt[\dot{x}_\mu p_\mu-H(x,\ p,\ t)].$$

2. **Канонические преобразования** реализуются производящими функциями. В частности, функция $F_2=F_2(x,\ p',\ t)$ порождает замену переменных

$$p_\mu=\frac{\partial F_2}{\partial x_\mu},\quad x'_\mu=\frac{\partial F_2}{\partial p'_\mu}. \tag{5}$$

Штрихованные переменные удовлетворяют уравнениям с гамильтонианом

$$H'(z',\ t)=\left(p_\mu f_\mu(x,\ t)+\frac{\partial F_2(x,\ p')}{\partial t}\right)\Bigg|_{z=z(z',t)}.$$

Если функция F_2 удовлетворяет уравнению Гамильтона—Якоби

$$\frac{\partial F_2}{\partial x_\mu}f_\mu(x,\ t)+\frac{\partial F_2}{\partial t}=0,$$

то полный интеграл $F_2=F_2(x,\ p',\ t)$ является производящей функцией КП. Новый гамильтониан $H'=0$.

3. **Каноническая теория возмущений.** Произвольная функция $A(z,\ t)$ удовлетворяет в силу системы (3), (4) уравнению

$$\dot{A}=\frac{\partial A}{\partial t}+[A,\ H]. \tag{6}$$

Представим H в виде $H=H_0+\Delta H$. Пусть $z_\alpha=z_\alpha(z',\ t)$ — решение уравнений (3), порождаемых гамильтонианом H_0. В работах [8, 13] показано, что решением (6) является функция

$$A(t)=\sum\int\limits_{t_0}^{t}dt_1\int\limits_{t_0}^{t_1}dt_2\ldots\int\limits_{t_0}^{t_{n-1}}dt_n[\ldots[A'(z_0',t),\ H'(z_0',t_1)]H'(z_0',t_2)]\ldots]\times \times H'(z_0',t_n)], \tag{7}$$

где $H'(z',t)=\Delta H(z(z',t),t)$, $A'(z',t)=A(z(z',t),t)$, $z_0'=z'(t_0)$. СП вычисляются по переменным z_0'.

Анализ сходимости полученного решения — стандартная процедура, основанная на методе мажорантных рядов, принципе сжатых отображений и других методах.

Рассмотрим ряд примеров, иллюстрирующих приложения метода удвоения в математической и теоретической физике.

4. **Интегрирование нелинейных уравнений.** *Пример 1.* Найдем решение уравнения $\dot{x}=x^n$. В соответствии с (2) $H(x,p)=px^n$. Выберем $H_0=0$. Подставляя в (7) $A=x$, $H'=H$, находим $x=x'+x'^{n-1}t+$ $+nx'^{2n-1}t^2/2+\ldots$. Этот ряд сходится при $|nx'^{n-1}t|\ll 1$ и представляет функцию $x(t)=[x'^{(1-n)}+(1-n)t]^{1/(1-n)}$.

Пример 2. Производящая функция [14]

$$x(t)=\frac{1}{\operatorname{ch} t}=\sum_{n=0}^{\infty}E_n\frac{t^n}{n!}$$

для чисел Эйлера E_n удовлетворяет уравнению $\dot{x}=f(x)$, $f(x)=$ $=-x\sqrt{1-x^2}$, которое имеет гамильтонову функцию $H(x,p)=pf(x)$. Подставляя в (7) $A=x$, $H'=H$, $t_0=0$, получим

$$x=x'-x'(1-x'^2)^{1/2}t-x'(2x'-1)\frac{t^2}{2!}+x'(6x'^2-1)(1-x'^2)^{1/2}\frac{t^3}{3!}+\ldots.$$

Поскольку $x(0)=1$, то $x'=1$. Следовательно, числа Эйлера определяются мультискобкой Пуассона

$$E_n=[\ldots[x',\ H(x',p')]H(x',p')]\ldots]H(x',p')]|_{x'=1}=$$
$$=\left(f(x')\frac{\partial}{\partial x'}\right)^{n-1}f(x').$$

После вычисления СП находим $E_{2n+1}=0$, $E_0=1$, $E_2=-1$, $E_4=5$, ... Аналогичным образом можно найти представление многочленов Эйлера, Бернулли, полиномов Эрмита, Лагерра и т. д.

5. **Решение трансцендентных и алгебраических уравнений.** Найдем решение $x=x(t)$ уравнения $\varphi(t,x)=0$, предполагая, что выполнены условия существования неявной функции $x=x(t)$. Дифференцируя, находим

$$\dot{x}=f(x,t),\quad f(x,t)=-\frac{\partial\varphi}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^{-1}. \tag{8}$$

Если $\varphi(t_0,x_0)=0$, то решение задачи Коши $x(t_0)=x_0$ для уравнения (8) является решением уравнения $\varphi(t,x)=0$.

Пример 3. Известно, что решение задачи двух тел приводит к параметрическому представлению траектории. Для определения явной зависимости координат от времени необходимо найти решение $\xi=\xi(t)$ уравнения Кеплера $\xi-e\sin\xi=\omega t$ [15, 16]. В соответствии с (8), (2)

$$\dot{\xi}=[\xi,H],\qquad H=\omega p(1-e\cos\xi)^{-1}.$$

Полагая в (7) $A=\xi$, $H'=H$, $t_0=0$, найдем

$$\xi=\frac{1}{1-e}\,\omega t-\frac{e}{(1-e)^4}\,\frac{(\omega t)^3}{3!}+\ldots.$$

Получим теперь решение в виде быстросходящегося ряда, произведя предварительно замену $\xi=x+\omega t$. Дифференцируя $x=e\sin(x+\omega t)$, имеем уравнение $\dot{x}=$ $\quad H=pf(x,\ t)$, $f=e\omega\cos(x+\omega t)\left[1-e\cos(x+\omega t)\right]^{-1}$. Поскольку $x(\omega t+2\pi)=x(\omega t)$, то после разложения в ряд Фурье $H(t)=2p\omega\sum\limits_{0}^{\infty}J_n(ne)\cos n\omega t$,

$$x=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\,J_n(ne)\sin n\omega t,$$

где $J_n(x)$ — функция Бесселя.

6. **Интегрирование уравнений движения.** Рассмотрим уравнения $\ddot{x}_n=-\partial\Pi(x)/\partial x_n$, $n=1$, 2, 3, эквивалентные системе (3):

$$\dot{x}_n=v_n,\quad \dot{v}_n=-\frac{\partial\Pi}{\partial x_n},$$

с гамильтонианом

$$H(x,\ p)=p_nv_n-\pi_n\frac{\partial\Pi}{\partial x_n}.$$

Здесь p, π — импульсы, канонически сопряженные координатам x, v в пространстве $\mathbf{R}^{12}$. Полагая в (7) $A=x_n$, $H'=H$, $t_0=0$, получим решение в виде $x_n=u_1x_n'+u_2v_n'$, где $u_{1,2}$ — два линейно независимых решения исходного уравнения. Если произвести КП: $x=x'+v't$, $v=v'$, $p=p'$, $\pi=\pi'-p't$, то новый гамильтониан не будет содержать слагаемое, соответствующее свободному движению. В этом случае формула (7) приводит к быстросходящемуся решению.

7. **Теория специальных функций.** Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x}+B(t)\dot{x}+C(t)x=0, \tag{9}$$

которое представим в виде системы

$$\dot{x}_1=x_2,\quad \dot{x}_2=-Bx_2-Cx_1$$

с гамильтонианом

$$H=p_1x_2-p_2(Bx_2+Cx_1). \tag{10}$$

Пусть $B(t)$, $C(t)$ — аналитические функции в точке $t=0$. Тогда, полагая в (7) $A=x_1$, получим решение (9) в виде ряда по степеням t. Пусть $B(t)$, $C(t)$ удовлетворяют условиям Фукса [17]: $B(t)=\sum\limits_{0}^{\infty}b_nt^{n-1}$, $C(t)=\sum\limits_{0}^{\infty}c_nt^{n-2}$. В этом случае представим (10) в виде $H=H_0+\Delta H$,

$$H_0=p_1x_2-p_2\left[\frac{b_0}{t}x_2+\frac{c_0}{t^2}x_1\right],\quad \Delta H=-p_2\left[b(t)\,x_2+c(t)\,x_1\right],$$

где $b(t)=\sum\limits_{1}^{\infty}b_nt^{n-1}$, $c(t)=\sum\limits_{1}^{\infty}c_nt^{n-2}$. Фундаментальная система решений, порождаемая H_0, зависит от корней $s_{2,1}=1/2\left[(1-b_0)\pm\sqrt{\lambda}\right]$, $\lambda=$

$=(1-b_0)^2-4c_0$, определяющего уравнения $(s-1)s+b_0s+c_0=0$. Пусть $\lambda>0$. Тогда после КП ($\sigma=s_2-s_1$)

$$x_1=(\sigma)^{-1/2}(t^{s_1}x_1'+t^{s_2}x_2'),\quad x_2=(\sigma)^{-1/2}(s_1t^{s_1-1}x_1'+s_2t^{s_2-1}x_2'),$$

$$p_1=(\sigma)^{-1/2}(s_2t^{-s_1}p_1'-s_1t^{-s_2}p_2'),\quad p_2=(\sigma)^{-1/2}(-t^{1-s_1}p_1'+t^{1-s_2}p_2')$$

эволюция штрихованных переменных определяется гамильтонианом $H'(z',t)=\Delta H(z(z',t),t)$. Полагая в (7) $A=x_1$, $t_0=0$, найдем

$$x(t)=\bar{x}_1(t)-\int_0^t F(t,t_1)(b(t_1)\bar{x}_2(t_1)+c(t_1)\bar{x}_1(t_1))\,dt_1+\ldots. \qquad (11)$$

Здесь $\bar{z}(t)=z(z_0',t)$, $z_0'=z'(0)$. Ряд (11) содержит два типа функций, пропорциональных функциям Грина

$$F(t_a,t_b)=[\bar{x}_1(t_a),\bar{p}_2(t_b)]=-\frac{1}{\sigma}\left[\left(\frac{t_a}{t_b}\right)^{s_1}-\left(\frac{t_a}{t_b}\right)^{s_2}\right]t_b,$$

$$G(t_a,t_b)=[\bar{x}_2(t_a),\bar{p}_2(t_b)]=-\frac{1}{\sigma}\left[s_1\left(\frac{t_a}{t_b}\right)^{s_1-1}-s_2\left(\frac{t_a}{t_b}\right)^{s_2-1}\right].$$

После интегрирования (11) имеем

$$x(t)=\frac{1}{\sqrt{\sigma}}[u_1(t)x_{10}'+u_2(t)x_{20}'], \qquad (12)$$

$$u_1(t)=t^{s_1}\left[1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n(s_1)t^n}{f(n+s_1)}+\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{f_m(n+s_1)f_n(s_1)t^{m+n}}{f(m+n+s_1)f(n+s_1)}+\ldots\right], \qquad (13)$$

$$f_n(s)=sb_n+c_n,\qquad f(s)=(s-s_1)(s-s_2).$$

Второе линейно независимое решение получается из $u_1(t)$ после замены $s_1\to s_2$. Функции $u_{1,2}(t)$ совпадают с решением, найденным классическим методом интегрирования с помощью рядов [17, с. 281].

Пример 4. Рассмотрим уравнение для вырожденной гипергеометрической функции $F(a,c,t)$. В этом случае [14, 17] $b_0=c$, $b_1=-1$, $c_1=-a$, остальные коэффициенты b_n, c_n равны нулю. Из (13) следует $u_1=\Phi(a,c,t)$, $u_2=t^{1-c}\Phi(a-c-1,2-c,t)$, где $\Phi(a,c,t)$ — ряд Куммера. Если произвести КП: $x_{10}'=x_1''$, $p_{10}'=p_1''$, $x_{20}'=x_2''(1-c)^{-1}$, $p_{20}'=p_2''(1-c)$, то решение приобретает вид

$$x(t)=[\Phi(a,c,t)x_1''+(1-c)^{-1}t^{1-c}e^t\Phi(1-a,2-c,-t)x_2''].$$

Найдем решение уравнения (9) для $F(a,c,t)$, не выделяя в (10) неаналитической составляющей гамильтониана H_0. Подставляя в (7) $A=x_1$, $H'=H$, $t_0=0$, получим

$$x(t)=x_1'+x_2'\left[t-ct(\ln t-1)+\frac{t^2}{2}+\frac{c^2}{2}(\ln^2 t-2\ln t+2)-\right.$$

$$\left.-\frac{c}{2}t^2\left(\ln t-\frac{1}{2}\right)+\frac{t^3}{6}+\ldots\right].$$

Здесь для упрощения формул положено $a=0$. Заметим, что $u_1(t)=\Phi(0,c,t)=1$, а второе линейно независимое решение представляет собой точное решение, разложенное в ряд Тейлора:

$$(1-c)^{-1}u_2(t)=t\sum_{n=0}^{\infty}c^n\frac{\partial^n}{\partial c^n}[(1-c)^{-1}e^{t-c\ln t}\Phi(1,2-c,-t)]|_{c=0}.$$

Этот пример представляет интерес в связи с анализом логарифмических асимптотик в полевых теориях [18]. Выделение неаналитических составляющих в полевом гамильтониане позволит получать ряды теории возмущений, не содержащие логарифмических вкладов.

8. **Преобразование Лиувилля — Грина или приближение ВКБ** [19]. Положим в (9) $B(t)=0$ и произведем КП, реализуемое производящей функцией $F_2(x,\ p',\ t)=(\Lambda^{-1})_{\alpha\beta}p'_\alpha x_\beta$, $\det\Lambda\neq 0$. Пусть $c(t)>0$ при $t>0$; полагая $\Lambda_{11}=c^{-1/4}\cos\varphi$, $\Lambda_{12}=c^{-1/4}\sin\varphi$, $\Lambda_{21}=-c^{1/4}\sin\varphi$, $\Lambda_{22}=c^{1/4}\cos\varphi$, $\varphi=\int\limits_0^t\sqrt{c}\,dt$, получим решение в виде

$$x=c^{-1/4}[x_1'\cos\varphi+x_2'\sin\varphi].$$

Эволюция штрихованных переменных определяется гамильтонианом

$$H'(x',\ p',\ t)=\frac{\dot c}{4c}[(p_1'x_1'-p_2'x_2')\cos 2\varphi+(p_1'x_2'+p_2'x_1')\sin 2\varphi].$$

Подставляя в (7) $A=x_1$, находим высшие приближения в методе ВКБ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Арнольд В. И. // Успехи матем. наук. 1963. **18**, № 6. С. 91—151. [2] Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М., 1979. [3] Джакалья Г. Е. Методы теории возмущений для нелинейных систем. М., 1979. [4] Вишик С. М. // Гледзер Е. Б., Должанский Ф. В., Обухов А. М. Системы гидродинамического типа и их применение. (Приложение). М., 1981. С. 280—352. [5] Мозер Ю. // Успехи матем. наук. 1981. **36**, № 6. С. 109—137. [6] Козлов В. В. // Там же. 1983. **38**, № 1. С. 3—63. [7] Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. М., 1984. [8] Павленко Ю. Г. Гамильтоновы методы в электродинамике и в квантовой механике. М., 1985. [9] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. М., 1965. [10] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. М., 1979. [11] Ахиезер Н. И. Лекции по вариационному исчислению. М., 1955. [12] Улаф Л. Я. Вариационное исчисление и интегральные уравнения. М., 1970. [13] Павленко Ю. Г. // ТМФ. 1981. **49**, № 1. С. 92—101. [14] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М., 1965. Т. 1. С. 55. [15] Рой А. Движение по орбитам. М., 1981. [16] Балк М. Б. Элементы динамики космического полета. М., 1965. С. 111. [17] Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения. М., 1962. [18] Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика. М., 1969. [19] Олвер Ф. Введение в асимптотические методы и специальные функции. М., 1978.

Поступила в редакцию
02.12.85

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1987. Т. 28, № 1

УДК 621.3

СИНТЕЗ НАПРАВЛЕННЫХ ОТВЕТВИТЕЛЕЙ НА ОСНОВЕ ЛИНЕАРИЗАЦИИ ОПЕРАТОРА ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ

В. А. Герасимов, С. Ю. Ковенский, А. В. Тихонравов

(кафедра математики)

1. **Введение.** Направленные ответвители (НО) СВЧ диапазона представляют собой важный класс радиофизических устройств, методы синтеза которых интенсивно разрабатываются в настоящее время [1]. В работах [2, 3] предложены основанные на вариационной постановке общие методы синтеза НО в случае, когда условия наилучшей конструктивной реализуемости состоят в требовании достаточной гладкости