Этот пример представляет интерес в связи с анализом логарифмических асимптотик в полевых теориях [18]. Выделение неаналитических составляющих в полевом гамильтониане позволит получать ряды теории возмущений, не содержащие логарифмических вкладов.

8. **Преобразование Лиувилля — Грина или приближение ВКБ** [19]. Положим в (9) $B(t)=0$ и произведем КП, реализуемое производящей функцией $F_2(x, p', t)=(\Lambda^{-1})_{\alpha\beta}p'_\alpha x_\beta$, $\det\Lambda\neq 0$. Пусть $c(t)>0$ при $t>0$; полагая $\Lambda_{11}=c^{-1/4}\cos\varphi$, $\Lambda_{12}=c^{-1/4}\sin\varphi$, $\Lambda_{21}=-c^{1/4}\sin\varphi$, $\Lambda_{22}=c^{1/4}\cos\varphi$, $\varphi=\int\limits_0^t\sqrt{c}\,dt$, получим решение в виде

$$x=c^{-1/4}[x_1'\cos\varphi+x_2'\sin\varphi].$$

Эволюция штрихованных переменных определяется гамильтонианом

$$H'(x', p', t)=\frac{\dot c}{4c}[(p_1'x_1'-p_2'x_2')\cos 2\varphi+(p_1'x_2'+p_2'x_1')\sin 2\varphi].$$

Подставляя в (7) $A=x_1$, находим высшие приближения в методе ВКБ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Арнольд В. И. // Успехи матем. наук. 1963. **18**, № 6. С. 91—151. [2] Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М., 1979. [3] Джакалья Г. Е. Методы теории возмущений для нелинейных систем. М., 1979. [4] Вишик С. М. // Гледзер Е. Б., Должанский Ф. В., Обухов А. М. Системы гидродинамического типа и их применение. (Приложение). М., 1981. С. 280—352. [5] Мозер Ю. // Успехи матем. наук. 1981. **36**, № 6. С. 109—137. [6] Козлов В. В. // Там же. 1983. **38**, № 1. С. 3—63. [7] Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. М., 1984. [8] Павленко Ю. Г. Гамильтоновы методы в электродинамике и в квантовой механике. М., 1985. [9] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. М., 1965. [10] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. М., 1979. [11] Ахиезер Н. И. Лекции по вариационному исчислению. М., 1955. [12] Улаф Л. Я. Вариационное исчисление и интегральные уравнения. М., 1970. [13] Павленко Ю. Г. // ТМФ. 1981. **49**, № 1. С. 92—101. [14] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М., 1965. Т. 1. С. 55. [15] Рой А. Движение по орбитам. М., 1981. [16] Балк М. Б. Элементы динамики космического полета. М., 1965. С. 111. [17] Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения. М., 1962. [18] Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика. М., 1969. [19] Олвер Ф. Введение в асимптотические методы и специальные функции. М., 1978.

Поступила в редакцию
02.12.85

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1987. Т. 28, № 1

УДК 621.3

СИНТЕЗ НАПРАВЛЕННЫХ ОТВЕТВИТЕЛЕЙ НА ОСНОВЕ ЛИНЕАРИЗАЦИИ ОПЕРАТОРА ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ

В. А. Герасимов, С. Ю. Ковенский, А. В. Тихонравов

(кафедра математики)

1. **Введение.** Направленные ответвители (НО) СВЧ диапазона представляют собой важный класс радиофизических устройств, методы синтеза которых интенсивно разрабатываются в настоящее время [1]. В работах [2, 3] предложены основанные на вариационной постановке общие методы синтеза НО в случае, когда условия наилучшей конструктивной реализуемости состоят в требовании достаточной гладкости

волновых сопротивлений НО. Эти методы позволяют решать разнообразные задачи синтеза НО как с заданными амплитудными свойствами, так и с заданными амплитудными и фазовыми свойствами одновременно. Обладая большой общностью, данные методы зачастую требуют значительных вычислительных затрат для решения конкретных задач синтеза. Поэтому актуальное значение имеет разработка простых приближенных методов синтеза НО с гладкими волновыми сопротивлениями, позволяющих быстро и с достаточной точностью решать отдельные задачи синтеза, а также находить начальные приближения для общих методов, основанных на вариационной постановке.

Естественной основой для разработки приближенных методов является линеаризация оператора прямой задачи, выражающего спектральные характеристики НО через его параметры (волновые сопротивления). Отметим, что на этой основе строились приближенные методы для решения многих радиофизических задач синтеза [4—8]. Предлагаемый в данной работе метод также основывается на линеаризации оператора прямой задачи и, кроме того, использует идею рассмотрения получаемого при этом уравнения как уравнения с неточно заданными оператором и правой частью и решения этого уравнения с помощью метода регуляризации А. Н. Тихонова.

2. **Вывод основных соотношений.** Рассмотрим систему уравнений, описывающую процесс распространения волны в НО:

$$f_1'(x, k)=ik[\rho(x)f_1(x, k)-r(x)f_2(x, k)],$$
$$f_2'(x, k)=ik[r(x)f_1(x, k)-\rho(x)f_2(x, k)]. \qquad (1)$$

Здесь $k=2\pi x_0/\lambda$ — волновое число (λ — длина волны), x_0 — длина области связи. Функции $\rho(x)$ — волновое сопротивление линий и $r(x)$ — сопротивление связи удовлетворяют условию идеальной направленности: $\rho^2(x)-r^2(x)=1$. Если $f_{1,2}(x, k)$ — решения (1) с начальными условиями

$$f_1(0, k)=1, \quad f_2(0, k)=0, \qquad (2)$$

то эти функции при $x=x_0$ дают коэффициенты передачи по напряжению между выходами в первичном канале $f_1(k)$ и между каналами $f_2(k)$: $f_1(k)=f_1(x_0, k)$; $f_2(k)=f_2(x_0, k)$.

При решении наиболее общих задач синтеза НО с одновременно заданными амплитудными и фазовыми свойствами в полосе частот $[k_1, k_2]$ задаются $a(k)$ и $\alpha(k)$ — требуемые зависимости модуля и фазы коэффициента передачи $f_2(k)$. Задача синтеза состоит в нахождении функций $\rho(x)$ и $r(x)$, реализующих с некоторой точностью заданные характеристики $a(k)$ и $\alpha(k)$.

Предположим, что сопротивление связи $r(x)$ мало и функция $f_2(x, k)$ имеет тот же порядок малости, что и $r(x)$. Учитывая условие идеальной направленности, можно записать, что $\rho(x)=1+r^2(x)/2+$ $+o(r^2)$. Отбрасывая в (1) члены второго порядка малости, получим линеаризованную систему

$$f_1'(x, k)=ikf_1(x, k),$$
$$f_2'(x, k)=ik[r(x)f_1(x, k)-f_2(x, k)]. \qquad (3)$$

Запишем решение (3) с начальными условиями (2) при $x=x_0$:

$$\int_0^{x_0} r(x)\, e^{ik(2x-x_0)}\, dx=-\frac{i}{k} f_2(x_0, k)=-\frac{i}{k} f_2(k). \qquad (4)$$

Будем рассматривать (4) как интегральное уравнение I рода относительно функции $r(x)$ с неточно заданными оператором (вследствие линеаризации) и правой частью, определяемой заданными зависимостями $a(k)$ и $\alpha(k)$: $f_2(k)=a(k)\exp[i\alpha(k)]$. Применим для решения уравнения (4) метод регуляризации А. Н. Тихонова [9]. Введем тихоновский функционал

$$M^{\mu}[r]=\|A[r(x)]-v(k)\|^2_{L_2[k_1,k_2]}+\mu\Omega[r(x)], \tag{5}$$

где A — интегральный оператор и $v(k)$ — правая часть в (4), Ω — стабилизирующий функционал, μ — параметр регуляризации. Стабилизирующий функционал зададим в виде

$$\Omega[r(x)]=\int_0^{x_0}\left\{q_0(x)\,r^2(x)+q_1(x)\left[\frac{dr}{dx}\right]^2\right\}dx.$$

Здесь $q_0(x)$ и $q_1(x)$ — неотрицательные весовые функции. Первое слагаемое в (5) оценивает точность решения задачи синтеза, второе слагаемое благодаря такому выбору Ω учитывает условия конструктивной реализуемости: достаточную гладкость волнового сопротивления связи и отсутствие областей сильной связи. Параметр μ можно рассматривать как параметр, управляющий процессом синтеза: он характеризует взаимное соотношение требований к точности аппроксимации требуемых спектральных характеристик и степени выполнения условий конструктивной реализуемости.

Наложим на $r(x)$ естественное ограничение, вытекающее из требования отсутствия скачков волнового сопротивления на границах области связи: $r(0)=r(x_0)=0$.

3. **Аналитическое решение задачи синтеза.** Для решения задачи синтеза найдем экстремаль тихоновского функционала. Уравнение Эйлера для этого функционала с учетом граничных условий для функции $r(x)$ имеет вид

$$\int_0^{x_0} g(x-\xi)\,r(\xi)\,d\xi+\mu L[r(x)]=u(x), \tag{6}$$

где L — дифференциальный оператор, порожденный стабилизирующим функционалом:

$$L[r(x)]=q_0(x)\,r(x)-\frac{d}{dx}\left[q_1(x)\,\frac{dr}{dx}\right].$$

Ядро g и правая часть u определяются следующим образом:

$$g(x-\xi)=\int_{k_1}^{k_2}\cos 2k(x-\xi)\,dk,$$

$$u(x)=-\operatorname{Im}\int_{k_1}^{k_2}\frac{1}{k}f_2^*(k)\,e^{ik(2x-x_0)}\,dk.$$

Одной из наиболее актуальных задач является задача синтеза НО с амплитудой и фазой коэффициента $f_2(k)$, близкими к заданным постоянным величинам. Рассмотрим сейчас этот случай. Пусть $a(k)\equiv a$, $\alpha(k)\equiv\alpha$. Возьмем $q_0(x)\equiv q_0$, $q_1(x)\equiv q_1$, где q_0, q_1 — постоянные ве-

личины. Сделаем в (6) замену переменных $t=x-x_0/2$. Доопределим функцию $r(t)$ нулем при $|t|>x_0/2$. Тогда (6) примет вид

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t-\eta)\, r(\eta+x_0/2)\, d\eta+\mu L[r(t+x_0/2)]=u(t). \tag{7}$$

Предположим, что это уравнение справедливо при всех t на действительной оси. Обозначим через $R(\omega)$, $U(\omega)$, $G(\omega)$ преобразования Фурье от функций $r(t)$, $u(t)$, $g(t)$. Выполняя фурье-преобразование уравнения (7), определяя функцию $R(\omega)$ и применяя формулу обратного фурье-преобразования, получим

$$r(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{U(\omega)\, e^{i\omega(x-x_0/2)}}{\sqrt{2\pi}\, G(\omega)+\mu(q_0-q_1\omega^2)}\, d\omega. \tag{8}$$

Используя явный вид функций $g(t-\eta)$ и $u(t)$, нетрудно найти $G(\omega)$ и $U(\omega)$ [10]:

$$G(\omega)=\begin{cases} 0, & \omega\in\{\omega\colon |\omega|<2k_1 \cup |\omega|>2k_2\},\\ \sqrt{\pi}/4\sqrt{2}, & \omega\in\{\omega\colon |\omega|=2k_1 \cup |\omega|=2k_2\},\\ \sqrt{\pi}/2\sqrt{2}, & \omega\in\{\omega\colon 2k_1<|\omega|<2k_2\},\end{cases}$$

$$U(\omega)=\begin{cases} 0, & \omega\in\{\omega\colon 0<|\omega|<2k_1 \cup |\omega|>2k_2\},\\ \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\, a\left[-a\sin\alpha\,\dfrac{1}{|\omega|}+i\cos\alpha\,\dfrac{1}{\omega}\right], & \\ \omega\in\{\omega\colon 2k_1<|\omega|<2k_2\}. & \end{cases}$$

Подставляя в (8) выражения $G(\omega)$ и $U(\omega)$, окончательно получим

$$r(x)=a\int_{2k_1}^{2k_2}\frac{\sin[\alpha+\omega(x-x_0/2)]}{\omega[\pi/2+\mu(q_0-q_1\omega^2)]}\, p\omega. \tag{9}$$

Выбором величин k_1 и k_2 достигается выполнение граничных условий $r(0)=r(x_0)=0$.

Рассмотрим конкретный пример определения волнового сопротивления связи с помощью выражения (9). Пусть $a=0,1$, $\alpha=90°$; частотный интервал, в котором ищется решение задачи синтеза, есть [2, 10]. Зададим $x_0=1$, $q_0=1$, $q_1=1$. При произвольно заданных k_1, k_2 граничные условия $r(0)=r(x_0)=0$, вообще говоря, выполняться не будут. Поэтому, фиксируя значение $k_2=10$, выберем величину k_1 так, чтобы эти условия выполнялись:

$$r(0)=r(x_0)=a\int_{2k_1}^{2k_2}\frac{\cos\omega x_0/2}{\omega[\pi/2+\mu(q_0-q_1\omega^2)]}\, d\omega=0.$$

Обычно выполняется условие $\mu\ll 1$; поэтому вторым слагаемым в квадратных скобках можно пренебречь по сравнению с первым и последнее равенство переписать в приближенном виде $r(0)=r(x_0)\cong\cong\frac{a}{\pi}[\mathrm{Ci}(k_2)-\mathrm{Ci}(k_1)]$, где Ci — интегральный косинус. Отсюда при $k_2=10$ получаем $k_1=0{,}6$. Определяемая формулой (9) при данных значениях k_1, k_2 функция $r(x)$ и соответствующий ей спектральный коэффициент $|f_2(k)|$ изображены на рис. 1, 2 штрих-пунктирными линиями.

Полученное приближенное аналитическое решение, определяемое формулой (9), весьма близко к точному решению уравнения Эйлера. Для сравнения на рис. 1, 2 пунктирными линиями изображены точное решение уравнения (6) при тех же условиях синтеза и соответствующая ему спектральная функция $|f_2(k)|$. Это решение получено на ЭВМ с помощью программы численного решения уравнения (6) стандартным путем сведения последнего к системе линейных алгебраических уравнений. Оба изображенных на рис. 1 решения были использованы в качестве начального приближения для решения задачи синтеза в общей вариационной постановке. На рис. 2 сплошной линией приведена спектральная характеристика НО, полученного в результате синтеза (в обоих случаях конечный результат одинаков). Максимумы и минимумы

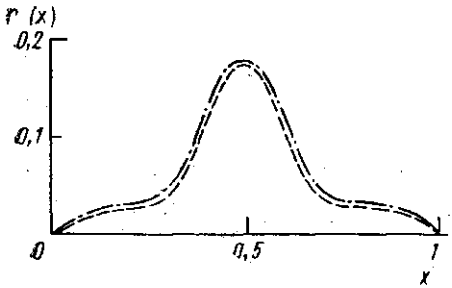

Рис. 1

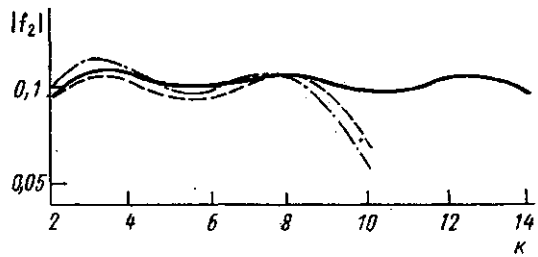

Рис. 2

этой кривой соответствуют максимальным отклонениям спектральной характеристики от номинального значения. Для частотного интервала $k \in [2,14]$ спектральный коэффициент $|f_2(k)|$ синтезированного НО лежит в полосе $0{,}1-0{,}007 \leqslant |f_2(k)| \leqslant 0{,}1+0{,}007$. Отметим, что рабочая область по частоте значительно увеличилась, в то время как отклонение спектральной характеристики от заданного значения существенно уменьшилось. Таким образом, полученное выше простое аналитическое выражение для $r(x)$ определяет решение уравнения Эйлера (6) с достаточной точностью с точки зрения получения эффективных начальных приближений для общих методов синтеза.

4. **Решение задачи синтеза с учетом условий физической реализуемости.** Получаемое из уравнения Эйлера для тихоновского функционала решение не всегда удовлетворяет имеющему место в задачах синтеза НО условию физической реализуемости $r(x) \geqslant 0$. При наложении этого дополнительного условия экстремаль тихоновского функционала уже не является в общем случае решением уравнения Эйлера. Решение в этом случае можно строить непосредственно, минимизируя функционал (5). Функционал (5) — выпуклый и непрерывный; множество функций, на котором ищется решение задачи:

$$r(x) \in \{r(x) \in C_1 \,|\, r_0 \geqslant r(x) \geqslant 0,\ x \in (0, x_0),\ r(0) = r(x_0) = 0\}$$

выпукло, ограничено и замкнуто. Поэтому экстремаль функционала (5) заведомо существует [11]. Для решения задачи минимизации подобного вида чрезвычайно эффективным оказывается метод сопряженных градиентов с проекцией на допустимое множество решений. По этому методу была составлена программа минимизации функционала (5), близкая по идейному содержанию к программе, описанной в [12]. Отметим, что составленная программа позволяет учитывать бо-

лее жесткие ограничения на функцию $r(x)$, а именно ограничения типа двусторонних неравенств: $r_{\min} \leqslant r(x) \leqslant r_{\max}$.

Приведем пример численного расчета с исходными данными: $a(k)=0{,}1$, $\alpha(k)=45°$, частотный интервал [3, 12], $r_{\min}=0{,}01$ и $r_{\max}=0{,}5$. Для значения параметра регуляризации $\mu=10^{-4}$ решение — волновое сопротивление связи $r(x)$ и спектральная характеристика приведены на рис. 3, 4. Достаточная широкополосность (коэффициент перекры-

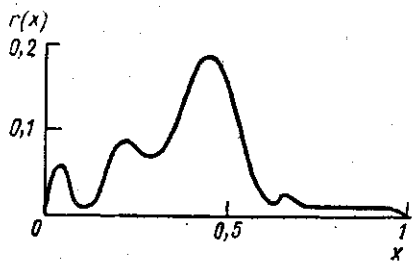

Рис. 3

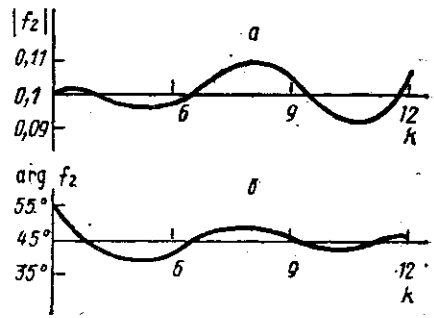

Рис. 4

тия частотного диапазона $\varkappa=k_2/k_1=4$) и небольшие отклонения спектральных характеристик от заданных зависимостей показывают, что предлагаемый приближенный метод позволяет решать и такие новые, не рассматривавшиеся ранее [1] задачи синтеза.

Рассмотренные примеры демонстрируют широкие возможности построения решений предложенным методом. Эти решения могут эффективно использоваться в качестве начальных приближений при решении задач синтеза в общей вариационной постановке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Кац Б. М., Мещанов В. П., Фельдштейн А. Л. Оптимальный синтез устройств СВЧ с Т-волнами. М., 1984. [2] Ковенский С. Ю., Тихонравов А. В. // Радиотехн. и электроника. 1981. **26**, № 8. С. 1599—1604. [3] Ковенский С. Ю., Тихонравов А. В. // Тез. докл. Всесоюз. науч. семинара «Методы синтеза и применение многослойных интерференционных систем». М., 1984. С. 130—131. [4] Фельдштейн А. Л. // Радиотехн. и электроника. 1961. **6**, № 2. С. 234—240. [5] Фельдштейн А. Л., Явич Л. Р. Синтез четырехполюсников и восьмиполюсников на СВЧ. М., 1971. [6] Мещанов В. П., Чумаевская Г. Г. // Радиотехн. и электроника. 1979. **24**, № 3. С. 474—480. [7] Козлов И. А., Савченко С. П. // Радиотехн. и электроника. 1981. **26**, № 3. С. 631—634. [8] Следков В. А. // Там же. 1981. **26**, № 6. С. 1310—1313. [9] Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М., 1979. [10] Диткин В. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М., 1961. [11] Васильев Ф. П. Методы решения экстремальных задач. М., 1981. [12] Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. М., 1983.

Поступила в редакцию
19.09.85