Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики. М., 1975. [4] Pestorius F. M., Blackstock D. T.//Finite amplitude waves effects in fluids. London, IPC Sience and Technology Press, Ltd, 1974. P. 24.

Поступила в редакцию
20.12.85

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1987. Т. 28, № 1

ГЕОФИЗИКА

УДК 551.466

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ ДВИЖЕНИЙ В ВОДОХРАНИЛИЩАХ ПРИ НАЛИЧИИ СТРАТИФИКАЦИИ

Н. Н. Нефедов, Ю. Г. Пыркин

(кафедра физики моря и вод суши)

Исследование придонных плотностных течений в водохранилищах является весьма интересной с точки зрения теории и важной в прикладном смысле задачей. Изучаемое явление довольно сложно с физической точки зрения, поэтому значительное количество экспериментального материала не нашло до настоящего времени однозначного теоретического объяснения. В ряде экспериментов было обнаружено интересное явление — периодические возмущения границы раздела слоев с различной плотностью [1]. Применительно к водохранилищам плотностная стратификация может быть обусловлена различием в температуре или в содержании твердых взвешенных частиц.

В настоящей работе предлагается один из возможных механизмов — волновой — и рассматривается математическая модель, позволяющая качественно объяснить наблюдаемое в эксперименте явление. Рассмотрим некоторые физические предположения, которые необходимо принять при теоретическом изучении задачи. Плотностная структура жидкости предполагается двухслойной: верхний слой имеет постоянную плотность ρ_1, нижний — ρ_2; будем считать также, что глубина и плотность не меняются вдоль горизонтальной координаты x. Пусть граница раздела совершает гармонические колебания с частотой вынуждающей силы, которая задается с помощью колебаний расхода жидкости на входе водохранилища. Такой механизм имеет место в водохранилищах на горных реках, где колебания расхода происходят за счет суточного хода интенсивности таяния ледников, из которых берет начало горная река.

В соответствии со сделанными физическими предположениями перейдем к математической постановке задачи. Рассмотрим слой идеальной жидкости $Q=\{(x, z): 0\leqslant x<L, -H\leqslant z\leqslant 0\}$, в котором плотность зависит лишь от вертикальной координаты z и является кусочно-постоянной функцией:

$$\rho(z)=\begin{cases}\rho_1, & 0\leqslant z<-h,\\ \rho_2, & -h<z\leqslant -H.\end{cases}$$

Рассматривая установившиеся решения задачи, т. е. зависящие от времени по закону $e^{i\sigma t}$, где σ — частота вынуждающей силы, предполагая, что колебания малы и могут быть описаны линеаризованными уравнениями Эйлера, и вводя потенциал скорости, получим стандартную систему уравнений

$$\Delta\Phi_j=0 \quad (j=1,\ 2), \tag{1}$$

для которой зададим граничные условия.

На свободной поверхности

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}-\frac{\sigma^2}{g}\right)\Phi_1=0,\ z=0. \tag{2}$$

На жестком дне

$$\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}=0,\ z=-H. \tag{3}$$

На границе раздела зададим условия сопряжения

$$(1+\varepsilon)\frac{\partial}{\partial z}\Phi_1=\frac{\partial\Phi_2}{\partial z},\ z=-h, \tag{4}$$

$$-\varepsilon\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\bigg|_{z=-h}=\frac{\sigma^2}{g}\left[\Phi_1(x,\ -h)-\Phi_2(x,\ -h)\right]. \tag{5}$$

В (1)—(5) Φ_j $(j=1,\ 2)$ — потенциал в 1-м и 2-м слоях, g — ускорение силы тяжести, $\varepsilon=(\rho_2-\rho_1)/\rho_1$.

При $x=0$ зададим граничное условие

$$\frac{\partial\Phi_j}{\partial x}\bigg|_{x=0}=\beta(z). \tag{6}$$

В случае $L=+\infty$ к поставленным условиям добавятся условия излучения при $x\to\infty$, при конечном L — граничные условия при $x=L$.

Потенциал связан с возвышениями уровня поверхности ζ_1 и границы раздела ζ_2 следующими соотношениями:

$$\zeta_1(x)=\Phi_1(x,\ 0)/\rho_1 g,\ \zeta_2(x)=\frac{\Phi_1(x,\ -h)-\Phi_2(x,\ -h)}{(\rho_1-\rho_2)\,g}. \tag{7}$$

Для решения поставленной задачи примем некоторые дополнительные условия. Введем параметр $l=g/\sigma^2$ и предположим, что $\alpha=H/l\ll 1$; пусть при этом $\alpha_1=h/l$ имеет тот же порядок малости, что и α. Так как $\alpha=\frac{H\sigma^2}{g}=\frac{4\pi^2H^2}{(\sqrt{gH})^2T^2}=\frac{4\pi^2H^2}{\lambda_0^2}$, где λ_0 — длина длинных волн периода T, то условие малости α означает, что глубина водоема мала по сравнению с длиной длинных волн. Следует отметить, что это условие хорошо выполняется в реальных экспериментах.

Решение задачи (1)—(6) может быть получено в виде бесконечного ряда с помощью преобразования Фурье, однако при условии малости α этот ряд будет сходиться медленно. Для решения поставленной задачи воспользуемся методом, предложенным в работах [2, 3], обобщая его на случай уравнений с разрывными коэффициентами.

В задаче (1)—(6) перейдем к безразмерным переменным $\Phi_j/(\rho_1 g l)$, x/l, z/l, сохранив для них старые обозначения.

Будем искать решение задачи методом разделений переменных в виде абсолютно и равномерно сходящегося ряда по системе функций

$\{\psi_n(z)\}$, где $\{\psi_n\}$ — собственные функции следующей задачи Штурма—Лиувилля:

$$\frac{d^2\psi}{dz^2}=\lambda\psi. \tag{8}$$

К уравнению (8) добавляются граничные условия и условия сопряжения вида (2)—(5).

Будем искать решение задачи Штурма—Лиувилля в виде

$$\psi=u_1=Ae^{\gamma z}+Be^{-\gamma z},\quad -\alpha_1\leqslant z\leqslant 0, \tag{9}$$

$$\psi=u_2=Ce^{\gamma(z+\alpha)}+De^{-\gamma(z+\alpha)},\quad -\alpha\leqslant z<\alpha_1, \tag{10}$$

$$\gamma=\sqrt{\alpha}.$$

Из уравнения (8) и условий сопряжения для нахождения γ получим дисперсионное уравнение, которое имеет вид

$$\alpha\operatorname{ch}p-p\operatorname{sh}p+\varepsilon[\alpha\operatorname{ch}kp-p\operatorname{sh}kp][\alpha\operatorname{ch}(1-k)p-p\operatorname{sh}(1-k)p]=F(\alpha,\ p),$$

где $p=\gamma\alpha$, $k=\alpha_1/\alpha=h/H$, $\alpha_2=(1-k)\alpha$.

Для простоты вычислений рассмотрим случай $k=1/2$. Тогда при $\alpha=0$ $F(0,\ p)=p\operatorname{sh}(p/2)[\varepsilon p\operatorname{sh}(p/2)-2\operatorname{ch}(p/2)]$ и можно заметить, что уравнение имеет два неотрицательных корня: $p_1{}^0=0$ и $p_2{}^0$ — корень выражения в скобках. Исследуя $F(\alpha,\ p)$, можно показать, что при $\alpha\ll 1$ функция имеет только два положительных корня [4]. Строя диаграммы Ньютона и применяя методы теории ветвления, получим асимптотику этих решений при $\alpha\to 0$:

$$p_0=\sqrt{\alpha}+\left\{\frac{1}{6}-\frac{\varepsilon}{8}\right\}\alpha^{3/2}+O(\alpha^2),$$

$$p_2=p_2^0+\frac{1}{p_2^0}+O(\alpha^2).$$

При этом $p_2{}^0$ может быть получено численными методами, но при $\varepsilon\to 0$ его можно найти приближенно [5]: $p_2=\frac{2}{\varepsilon}\operatorname{cth}\left[\frac{2}{\varepsilon}(\alpha+\delta_1)\right]=$ $=\frac{2}{\varepsilon}(\alpha+\delta_2)$, где $\delta_j=0(1)$ при $\varepsilon\to 0$. Остальные корни чисто мнимые. Эти факты соответствуют общей теории задач Штурма—Лиувилля рассмотренного выше типа. Таким образом, мы имеем два положительных собственных значения λ_1 и λ_2, а остальные все отрицательны.

Собственным значениям λ_n соответствуют собственные функции $\{\psi_n\}$ задачи, по которым может быть разложена всякая дважды непрерывно дифференцируемая при $z\in[-\alpha,\ -\alpha_1[U]-\alpha_1,\ 0]$ и удовлетворяющая условиям сопряжения типа (2)—(5) функция. Разлагая $\beta(z)$ в ряд по ортонормированной системе функций и представляя решение задачи (2)—(6) в виде $\Phi(x,\ z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)\psi_n(z)$, для $\varphi_n(x)$ получим уравнения

$$\frac{\partial^2\varphi_n(x)}{\partial x^2}+\lambda_n\varphi_n=0, \tag{11}$$

$$\left.\frac{\partial\varphi_n}{\partial x}\right|_{x=0}=q_n,\quad q_n=\int\limits_{-\alpha}^{0}\beta(z)\psi_n(z)\,dz. \tag{12}$$

В случае полубесконечного слоя к задаче (11), (12) при $\lambda_n>0$ добавляются условия излучения, при $\lambda_n<0$ — условия ограниченности на бесконечности. Таким образом, λ_1 и λ_2 дадут нам волновые решения, а λ_n при $n\geqslant 3$ дадут нам нераспространяющиеся моды, затухающие вблизи границы $x=0$.

Волновая часть решения в этом случае имеет вид

$$\Phi_N=\sum_{n=1}^{2}\left(-\frac{q_n}{i\sqrt{\lambda_n}}\right)\exp\left(-i\sqrt{\lambda_n}\,x\right)\psi_n(z).$$

Если слой ограничен, то на правом конце при $x=L$ нужно задать граничное условие. Пусть выполнено условие непроницаемости. Тогда к (8), (9) для нахождения φ_n добавится условие $\partial\varphi_n/\partial x(L)=0$, и ее решение для волновой части будет иметь вид

$$\varphi_n=\frac{q_n}{\sqrt{\lambda_n}\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,L\right)}\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,(L-x)\right)\quad(n=1,\ 2).$$

Выражения для собственных функций $\psi_n(z)$ получим, подставляя найденные собственные значения в (9), (10):

$$\psi_n(z)=B_n\begin{cases}\exp(\gamma_n z)\dfrac{\gamma+1}{\gamma-1}+\exp(-\gamma_n z), & -\dfrac{\alpha}{2}<z\leqslant 0,\\[2mm] \dfrac{2(1+\varepsilon)\exp\left(-\dfrac{\gamma_n\alpha}{2}\right)\dfrac{\gamma_n+1}{\gamma_n-1}-\exp\left(\dfrac{\gamma_n\alpha}{2}\right)}{\exp\left(\dfrac{\gamma_n\alpha}{2}\right)-\exp\left(-\dfrac{\gamma_n\alpha}{2}\right)}\times\\ \times\left[\exp(\gamma_n(z+\alpha))+\exp(-\gamma_n(z+\alpha))\right],\end{cases}$$

где B_n выбирается из условия нормировки $\int\limits_{-\alpha}^{0}\psi_n^2dz=1$.

Можно показать, что полученное приближенное решение задачи (1)—(6) отличается на величину порядка α^2 от точного. Наблюдаемый в эксперименте диапазон периодов колебаний составляет от суток до получаса. Тогда, используя формулу (7), в случае $H=90$ м, $T=1/2$ ч, $g=10$ м/с^2 получим $\alpha=4\pi^2(90/54000)^2=(\pi^2/9)\cdot10^{-4}$ — достаточно малую величину. Таким образом, формула (7) позволяет оценить точность полученного приближенного решения.

Отметим также, что при выполнении условий, при которых решалась задача (1)—(6), как на поверхности слоя, так и на границе раздела слоя распространяются волны с частотой вынуждающей силы.

Более подробно рассмотрим ограниченный объем. В этом случае на поверхности и границе раздела получаются стоячие волны частоты σ. Используя формулы (7), получим амплитуду возвышения уровня на поверхности и границе раздела:

$$\zeta_1(x)=\frac{1}{\rho_1 g}\left\{\frac{q_1}{\gamma_1\sin(\gamma_1 L)}\cos(\gamma_1(L-x))B_1\left(\frac{\gamma_1+1}{\gamma_1-1}+1\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{q_2}{\gamma_2\sin(\gamma_2 L)}\cos(\gamma_2(L-x))B_2\left(\frac{\gamma_2+1}{\gamma_2-1}+1\right)\right\}.$$

$$\zeta_2(x)=\frac{1}{\rho_1 g}\left\{\frac{q_1}{\gamma_1\sin(\gamma_1 L)}\cos(\gamma_1(L-x))\,B_1\left(\frac{\gamma_1+1}{\gamma_1-1}\exp\left(-\frac{\gamma_1\alpha}{2}\right)+\right.\right.$$
$$\left.+\exp\left(\frac{\gamma_1\alpha}{2}\right)\right)+\frac{q_2}{\gamma_2\sin(\gamma_2 L)}\cos(\gamma_2(L-x))\,B_2\left(\frac{\gamma_2+1}{\gamma_2-1}\exp\left(-\frac{\gamma_2\alpha}{2}\right)+\right.$$
$$\left.\left.+\exp\left(\gamma_2\frac{\alpha}{2}\right)\right)\right\}.$$

Формулы для возвышений состоят из двух частей. При этом, как несложно заметить, первые слагаемые слабо зависят от стратификации и при $\varepsilon\to 0$ переходят в возвышение поверхности уровня и мнимой границы раздела однородного слоя [5]. Вторые слагаемые целиком обязаны наличию стратификации, при этом отношение амплитуд этих волн на поверхности и на границе раздела, как показывает анализ, пропорционально $\delta(\varepsilon)$, $\delta(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$. А так как в реальных условиях $\varepsilon\approx 10^{-3}$, то в случае совпадения частоты σ с резонансной частотой (при которой обращается в нуль $\sin(\gamma_2 L)$) амплитуда волны на границе раздела существенно больше амплитуды волны на поверхности. В случае, когда резонансной является частота, соответствующая γ_1, эти амплитуды сравнимы по величине.

В заключение авторы благодарят С. А. Габова за полезное обсуждение работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Самолюбов Б. И., Галкин С. В., Зеленов А. А. // Изв. АН СССР. ФАО. 1983. **19**. С. 1188—1198. [2] Габов С. А., Свешников А. Г. // ЖВМ и МФ. 1980. **20**, № 6. С. 1564—1579. [3] Габов С. А., Кастро Р. // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Матем. и мех. 1980. № 6. С. 62—67. [4] Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М., 1969. [5] Секерж-Зенкович С. Я. // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Матем. и мех. 1972. № 6. С. 112—121.

Поступила в редакцию
30.10.85

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1987. Т. 28, № 1

УДК 577.3:577.4

НОВЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПОДПОВЕРХНОСТНЫХ ПОТОКОВ ФОТОСИНТЕТИЧЕСКИ АКТИВНОЙ РАДИАЦИИ И СЛЕДСТВИЯ ДЛЯ РАСЧЕТА ПРОДУКЦИИ ФИТОПЛАНКТОНА В ЕСТЕСТВЕННЫХ ВОДОЕМАХ

Х. Баумерт (ГДР)

(кафедра физики моря и вод суши)

1. **Введение, обозначения.** Качественные и количественные свойства временных изменений подповерхностной фотосинтетически активной солнечной радиации I_0 (ФАР, 350—700 нм) представляют большой интерес для водной экологии. Этот радиационный поток является главным источником энергии и негэнтропии для всех водных экосистем, включая океаны как биохимические реакторы глобального значения.

В литературе описаны различные подходы к проблеме [1, 2]. Несмотря на важность проблемы, до настоящего времени в литературе имелись только грубые оценки качественных и количественных характеристик ФАР. Основной причиной этого было отсутствие точных из-