$$\zeta_2(x)=\frac{1}{\rho_1 g}\left\{\frac{q_1}{\gamma_1\sin(\gamma_1 L)}\cos(\gamma_1(L-x))\,B_1\left(\frac{\gamma_1+1}{\gamma_1-1}\exp\left(-\frac{\gamma_1\alpha}{2}\right)+\right.\right.$$

$$\left.+\exp\left(\frac{\gamma_1\alpha}{2}\right)\right)+\frac{q_2}{\gamma_2\sin(\gamma_2 L)}\cos(\gamma_2(L-x))\,B_2\left(\frac{\gamma_2+1}{\gamma_2-1}\exp\left(-\frac{\gamma_2\alpha}{2}\right)+\right.$$

$$\left.\left.+\exp\left(\gamma_2\frac{\alpha}{2}\right)\right)\right\}.$$

Формулы для возвышений состоят из двух частей. При этом, как несложно заметить, первые слагаемые слабо зависят от стратификации и при $\varepsilon\to0$ переходят в возвышение поверхности уровня и мнимой границы раздела однородного слоя [5]. Вторые слагаемые целиком обязаны наличию стратификации, при этом отношение амплитуд этих волн на поверхности и на границе раздела, как показывает анализ, пропорционально $\delta(\varepsilon)$, $\delta(\varepsilon)\to0$ при $\varepsilon\to0$. А так как в реальных условиях $\varepsilon\approx10^{-3}$, то в случае совпадения частоты σ с резонансной частотой (при которой обращается в нуль $\sin(\gamma_2 L)$) амплитуда волны на границе раздела существенно больше амплитуды волны на поверхности. В случае, когда резонансной является частота, соответствующая γ_1, эти амплитуды сравнимы по величине.

В заключение авторы благодарят С. А. Габова за полезное обсуждение работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Самолюбов Б. И., Галкин С. В., Зеленов А. А. // Изв. АН СССР. ФАО. 1983. **19**. С. 1188—1198. [2] Габов С. А., Свешников А. Г. // ЖВМ и МФ. 1980. **20**, № 6. С. 1564—1579. [3] Габов С. А., Кастро Р. // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Матем. и мех. 1980. № 6. С. 62—67. [4] Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М., 1969. [5] Секерж-Зенкович С. Я. // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Матем. и мех. 1972. № 6. С. 112—121.

Поступила в редакцию
30.10.85

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1987. Т. 28, № 1

УДК 577.3:577.4

НОВЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПОДПОВЕРХНОСТНЫХ ПОТОКОВ ФОТОСИНТЕТИЧЕСКИ АКТИВНОЙ РАДИАЦИИ И СЛЕДСТВИЯ ДЛЯ РАСЧЕТА ПРОДУКЦИИ ФИТОПЛАНКТОНА В ЕСТЕСТВЕННЫХ ВОДОЕМАХ

Х. Баумерт (ГДР)

(кафедра физики моря и вод суши)

1. **Введение, обозначения.** Качественные и количественные свойства временных изменений подповерхностной фотосинтетически активной солнечной радиации I_0 (ФАР, 350—700 нм) представляют большой интерес для водной экологии. Этот радиационный поток является главным источником энергии и негэнтропии для всех водных экосистем, включая океаны как биохимические реакторы глобального значения.

В литературе описаны различные подходы к проблеме [1, 2]. Несмотря на важность проблемы, до настоящего времени в литературе имелись только грубые оценки качественных и количественных характеристик ФАР. Основной причиной этого было отсутствие точных измерений квантового потока I_0 непосредственно под поверхностью воды и соответствующих положений Солнца. На основе результатов [3], полученных при помощи квантового счетчика, мы попытаемся предложить метод расчета радиационных характеристик, достаточно точный для экологических приложений. В работе [3] получено для ясного безоблачного неба

$$I_0(t,\ t',\ \varphi)=\gamma[\sin \tilde{h}_{\odot}(t,\ t',\ \varphi)]^{\beta}, \qquad (1)$$

где $\tilde{h}_{\odot}(t,\ t',\ \varphi)$ — наблюдаемая высота Солнца над горизонтом (в градусах). Эмпирические параметры γ и β в (1), определенные на основе измерений, проведенных в Северном, Средиземном, Карибском и Саргассовом морях, Северной Атлантике и Индийском океане, равны

$$\gamma=1{,}2\cdot 10^{21}\ \text{фотон}/(\text{м}^2\cdot\text{с})\approx 456\ \text{Вт}/\text{м}^2=1{,}642\ \text{МДж}/(\text{м}^2\cdot\text{ч}),$$

$$\beta=1{,}40,$$

где

$$1\ \text{фотон соответствует}\ \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2}\frac{hc}{\lambda}\,d\lambda\approx 3{,}8\cdot 10^{-19}\ \text{Дж},\ \lambda_1=350\ \text{нм},$$

$\lambda_2=700$ нм, h — постоянная Планка, c — скорость света. Ниже будут приведены астрономические формулы для $\tilde{h}_{\odot}(t,\ t',\ \varphi)$, использующие следующие обозначения: t — порядковый номер дня года [сут]; t' — суточное время [ч] ($t'=0$ соответствует максимальной высоте Солнца над горизонтом); φ — географическая широта [градусы]; $\tau(t,\ \varphi)$ — продолжительность фотопериода [ч]; T — средняя продолжительность суток, $T=24$ ч; $I_0(t,\ t',\ \varphi)$ — мгновенная интенсивность подповерхностного потока ФАР [МДж/(м$^2\cdot$ч)]; $I_{0,\max}(t,\ \varphi)$ — суточный максимум I_0 [МДж/(м$^2\cdot$ч)]; $\langle I_0\rangle_{t,\varphi}$ — суточный интеграл I_0 [МДж/(м$^2\cdot$сут)]; $\tilde{h}_{\odot}(t,\ t',\ \varphi)$ — наблюдаемая высота Солнца над горизонтом [градусы]; $h_{\odot}(t,\ t',\ \varphi)$ — «истинная» высота Солнца [градусы].

2. **Астрономические формулы.** Движение Солнца относительно неподвижного наблюдателя на Земле обычно описывается тремя системами (см. любой справочник по астрономии, например [4]): *а*) горизонтальной, *б*) экваториальной и *в*) эклиптической. Пренебрегая рефракцией в атмосфере и конечным угловым размером Солнца, получаем окончательно

$$h_{\odot}(t,\ t',\ \varphi)=90°-\arccos[(c\sin\varphi)(\sin\delta_{\odot})+(\cos\varphi)(\cos\delta_{\odot})\cos(\omega_{\oplus}t')],$$

$$\delta_{\odot}(t)=\arcsin\{(\sin\varepsilon)\sin[\omega_{\odot}(t-t_s)]\}, \qquad (2)$$

где $\omega_{\odot}$ — угловая скорость орбитального движения Земли относительно Солнца ($\omega_{\odot}\approx 0{,}9863°$/ч); $\omega_{\oplus}$ — угловая скорость вращения Земли ($\omega_{\oplus}\approx 15°$/ч); t_s — номер дня весеннего равноденствия ($t_s=80$ сут); ε — склонение эклиптики ($\varepsilon\approx 23{,}44°$); $\delta_{\odot}(t)$ — угловое отклонение Солнца [градусы].

Продолжительность фотопериода может быть рассчитана при помощи (2) и при условии $h_{\odot}=0$ (если пренебречь рефракцией в атмосфере и угловым размером Солнца):

$$\tau(t,\ \varphi)=\frac{2}{\omega_{\oplus}}\arccos[-(\operatorname{tg}\varphi)(\operatorname{tg}\delta_{\odot})]. \qquad (3)$$

Полагая $\tilde{h}_{\odot}=h_{\odot}$ и подставив (2) и (3) в (1), получим

$$
\begin{aligned}
&I_0(t,\ t',\ \varphi)=\gamma\,[a+b\cos(\omega_{\oplus}t')]^{\beta};\\
&a(t,\ \varphi)=(\sin\varphi)(\sin\delta_{\odot});\\
&b(t,\ \varphi)=(\cos\varphi)(\cos\delta_{\odot});\\
&\langle I_0\rangle_{t,\varphi}=\frac{2}{T}\int_0^{\tau/2} I_0(t,\ t',\ \varphi)\,dt'=\frac{2\gamma}{T}\int_0^{\tau/2}[a+b\cos(\omega_{\oplus}t')]^{\beta}dt';\\
&I_{0,\max}(t,\ \varphi)=\gamma\,(a+b)^{\beta}.
\end{aligned}
\qquad (4)
$$

3. **Численные результаты.** Для определения численного значения интеграла в (4) мы использовали правило Симпсона с 50 интервалами. На рис. 1, *а* показана зависимость $\langle I_0\rangle_{t,\varphi}$ от дня года t и широты φ. Мы приводим только половину этих симметричных кривых. Данные рис. 1, *а* относятся к Северному полушарию. Значения для Южного полушария могут быть получены простым переходом от t к $t\pm\pm 182{,}5$ сут. Как нетрудно видеть, $\langle I_0\rangle_{t,\varphi}\leqslant 13$ МДж/(м$^2\cdot$сут). На рис. 1, *б* аналогично представлено годовое изменение $I_{0,\max}(t,\ \varphi)$ с очевидной верхней границей $I_{0,\max}\leqslant 1{,}642$ МДж/(м$^2\cdot$ч)$=\gamma$.

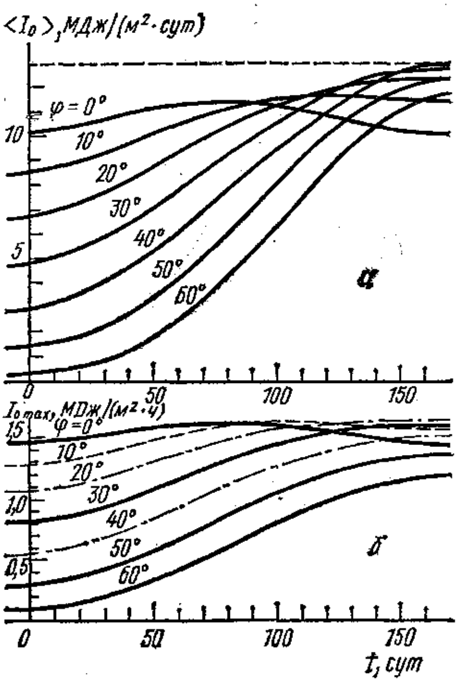

Рис. 1. Зависимость суточного интеграла ФАР $\langle I_0\rangle$ (*а*) и суточного максимума ФАР $I_{0,\max}$ (*б*) от географической широты φ и от дня года t

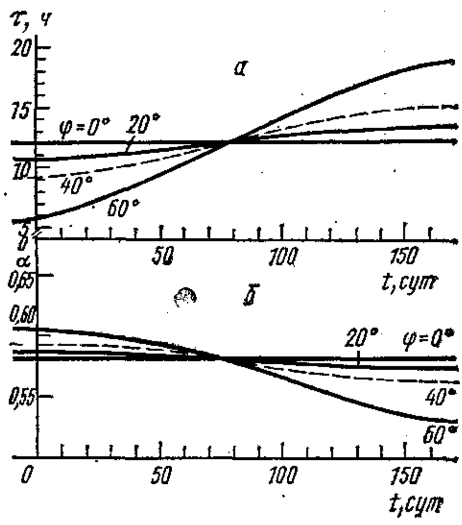

Рис. 2. Зависимость продолжительности фотопериода τ (*а*) и формфактора суточного изменения ФАР α (*б*) от географической широты φ и от дня года t

На рис. 2, *а* даны соответствующие продолжительности фотопериода. На рис. 3 показан годовой интеграл $I_a(\varphi)$ как функция широты (кривая *1*). Для практического использования представляем I_a как многочлен (φ в градусах):

$$I_a(\varphi)\approx(3976{,}2-9{,}643\varphi-0{,}4405\varphi^2)\ \text{МДж}/(\text{м}^2\cdot\text{год}).$$

Соответствующее среднегодовое значение

$$\overline{\langle I_0 \rangle_\varphi} \approx (10{,}9 - 0{,}0264\varphi - 0{,}00121\varphi^2)\ \text{МДж/(м}^2\cdot\text{сут)} =$$
$$= (3{,}03 - 0{,}00733\varphi - 0{,}000336\varphi^2)\ \text{кВт}\cdot\text{ч/(м}^2\cdot\text{сут)} =$$
$$= (0{,}126 - 3{,}05\cdot 10^{-4}\varphi - 1{,}40\cdot 10^{-5}\varphi^2)\ \text{кВт/м}^2.$$

4. **Ошибки приближения.** Астрономические формулы (4) содержат три главных приближения: *а*) атмосферной рефракцией, *б*) угловым размером Солнца, *в*) многими малыми астрономическими поправками, связанными с использованием усредненной продолжительности года, усредненного расстояния Земля—Солнце, пренебрежением влияния других тел Солнечной системы и т. п.

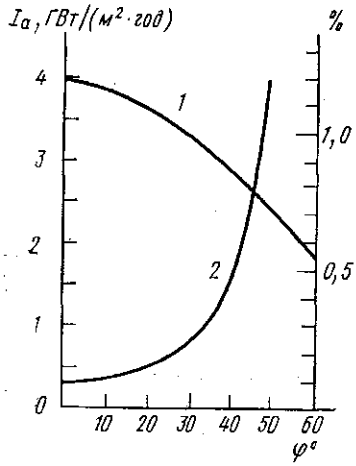

Рис. 3. Зависимость годового интеграла ФАР I_a (*1*) и ошибки суточного интеграла ФАР из-за пренебрежения рефракцией атмосферы для $t = -11$ (*2*) от географической широты φ

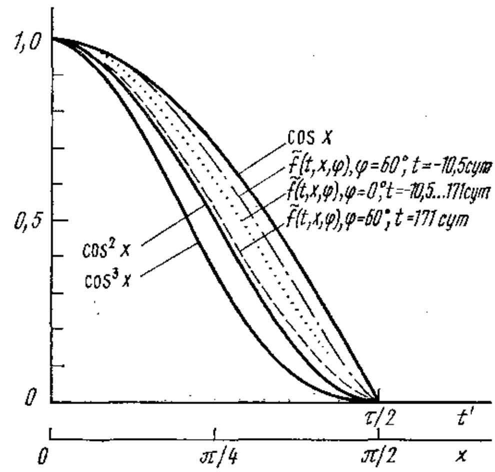

Рис. 4. Разные примеры нормированного суточного изменения ФАР в зависимости от нормированного времени дня t'

В то время как приближение (*в*) имеет весьма малое значение по сравнению с приближениями (*а*) и (*б*), последние иногда учитываются при расчетах потока ФАР (см., например, [1]).

Угловая рефракция R для солнцестояния при средних значениях атмосферных параметров [5, 6, 7] представляется как

$$R = \tilde{h}_\odot - h_\odot = r\left(\frac{1+\theta}{\theta + \sin^2 h_\odot}\right)^{1/2}\cos h_\odot,\quad \theta \approx 7{,}25\cdot 10^{-4},\quad r \approx 57'' = 0{,}55^\circ$$
$$(\text{т. е. } \Delta\tau_R \approx 4{,}4\ \text{мин}). \tag{5}$$

Средний угловой размер Солнца для земного наблюдателя 0,267° (т. е. $\Delta\tau_S \approx 2{,}2$ мин). Соответствующая относительная ошибка продолжительности дня, рассчитанная по (4), имеет величину

$$\left|\frac{\Delta\tau_R}{\tau}\right| \leqslant 1{,}2\%,\quad \left|\frac{\Delta\tau_S}{\tau}\right| \leqslant 0{,}6\%.$$

Вообще говоря, не очевидно, что соответствующая ошибка суточного интеграла $\langle I_0\rangle_{t,\varphi}$ имеет тот же порядок. Для изучения влияния $R=R(h_\odot)$ мы рассчитали два суточных интеграла по формулам

$$\langle I_0\rangle_{t,\varphi}=\frac{2\gamma}{T}\int\limits_0^{\tau/2}\sin^\beta[\tilde{h}_\odot(t,\ t',\ \varphi)]\,dt',$$

$$\tilde{h}_\odot(t,\ t',\ \varphi)=h_\odot(t,\ t',\ \varphi)+R(h_\odot),$$

где R при коррекции по рефракции определяется по (5), а при отсутствии коррекции ($\tilde{h}_\odot=h_\odot$) $R=0$. Относительная разница значений этих интегралов для «критического» дня $t=-11$ (для Северного полушария) дана на рис. 3 (кривая 2). Для широт менее 50° относительная разница менее 1%. Для широты 60° она равна 6,3%.

С другой стороны, данные [3] показывают, что $I_0(t,\ t',\ \varphi)$ зависит от флуктуирующих атмосферных условий. Относительное среднеквадратичное отклонение (1) не менее 10%. Поскольку $\Delta\tau_R$ и $\Delta\tau_S$ имеют разные знаки, что приводит к частичной компенсации соответствующих отклонений, ошибка в формуле (4) на один порядок меньше, чем в (1). Таким образом, полностью оправдывается использование только (4).

5. **Формфактор суточного изменения потока ФАР.** Определим безразмерную мгновенную ФАР как

$$f(t,\ t',\ \varphi)=\frac{I_0(t,t',\varphi)}{I_{0,\max}(t,\varphi)},$$

причем $f(t,\ 0,\ \varphi)=1$, $f(t,\ \tau/2,\ \varphi)=0$, и формфактор α как

$$\alpha(t,\ \varphi)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}f(t,\ t',\ \varphi)\,dt'.$$

При использовании безразмерного времени x,

$$x=\pi t'/\tau(t,\ \varphi),$$

для формфактора α получим

$$\alpha(t,\ \varphi)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\tilde{f}(t,\ x,\ \varphi)\,dx,$$

причем $\tilde{f}(t,\ 0,\ \varphi)=1$, $\tilde{f}(t,\ \pi/2,\ \varphi)=0$. Таким образом, суточный интеграл $\langle I_0\rangle_{t,\varphi}$ может быть выражен как

$$\langle I_0\rangle_{t,\varphi}=\alpha I_{0,\max}\frac{\tau}{T}$$

или

$$\alpha=\frac{T}{\tau}\frac{\langle I_0\rangle_{t,\varphi}}{I_{0,\max}}. \tag{6}$$

На основе наших численных результатов мы рассчитываем α по (6). Результаты приведены на рис. 2, *б*. Можно заключить, что

$$0{,}525\leqslant\alpha(t,\ \varphi)\leqslant0{,}61,\ \text{если}\ |\varphi|\leqslant60°, \tag{7}$$

т. е. α является мало меняющимся параметром и форма суточного изменения ФАР должна быть относительно постоянной.

Для сравнения с нашим результатом (7) в таблице приведены описанные ранее приближения.

Некоторые приближения для суточного изменения ФАР

i	$\tilde{f}_i(t, x, \varphi)$	$\alpha_i(t, \varphi)$	Источник
1	$\cos x$	$2/\pi \approx 0,64$	O'Connor & Di Toro [8]
2	$\cos^2 x$	$1/2 = 0,50$	Steel [9]
3	$\cos^3 x$	$4/3\pi \approx 0,42$	Parsons & Takahashi, 1973 (цит. по [10])

Заметим, что $\alpha_2 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1$, т. е.

$$\cos^2 x \leqslant \tilde{f}(t, x, \varphi) \leqslant \cos x.$$

Это иллюстрируется рис. 4. В итоге представляем

$$f(t, t', \varphi) = A\cos\left(\frac{\pi}{\tau}t'\right) + B\cos^2\left(\frac{\pi}{\tau}t'\right). \tag{8}$$

Коэффициенты A, B можно определить, задавая в (8) $t'=0$ и интегрируя (8) по $t'=0\ldots\pi/2$. В результате

$$\begin{cases} B = 1 - A, \\ A = \pi\dfrac{2\alpha-1}{4-\pi} \approx 7,32\alpha - 3,66 \approx 0,18\ldots0,81. \end{cases}$$

Окончательно получим

$$\begin{cases} I_0(t, t', \varphi) = I_{0,\max}\left\{\left[7,32\alpha - 3,66 + (4,66 - 7,32\alpha)\cos\left(\dfrac{\pi}{\tau}t'\right)\right]\cos\left(\dfrac{\pi}{\tau}t'\right)\right\}, \\ \alpha = \alpha(t, \varphi), \\ I_{0,\max} = I_{0,\max}(t, \varphi), \\ \tau = \tau(t, \varphi). \end{cases} \tag{9}$$

В экологических приложениях применение (9) для расчетов иногда удобнее, чем (4).

6. **Формфактор и суточная продукция фитопланктона.** Полная суточная продукция органического вещества (нормированного на количество углерода) в водном столбе может быть описана как [11]

$$\prod = \left(1 - \frac{z_{эв}}{z_*}\right)\Phi_{эфф}\langle I_0\rangle \Psi(p),$$

$$\Psi(P) = \frac{2}{\alpha\pi p}\int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^{\infty} g(J(x, y))\,dy\,dx, \tag{10}$$

$$J(x, y) = p\tilde{f}(t, x, \varphi)e^{-y}.$$

Двойной интеграл в (10) содержит интегрирование по безразмерной глубине $y=0\ldots\infty$ (мы предполагаем здесь полное светопоглощение в водном столбе) и интегрирование по безразмерному времени $x=0\ldots\ldots\pi/2$, причем $g(J)$ — безразмерная скорость фотосинтеза как функция безразмерной интенсивности света J; p — безразмерное отношение I_0/I_k; I_k — интенсивность полунасыщения [МДж/(м²·ч)]; $z_{эв}$ — глубина эвфотической зоны [м]; $\Phi_{эфф}$ — эффективное значение квантового выхода фотосинтеза (для данных условий) [гС/МДж]; z_* — верхний предел $z_{эв}$ ($z_*=120$ м). Для изучения влияния $\tilde{f}(t, x, \varphi)$ на П и Ψ полагаем

$$\tilde{f}(t, x, \varphi)=\cos^n x, \qquad n=1, 2, 3.$$

Выберем функцию g такую, что

$$g(J)=\begin{cases} J, & J\leqslant 1,\\ 1, & J\geqslant 1,\end{cases}$$

т. е. соответствующую максимальной продукции фитопланктона (подробнее см. [11]). Результирующую функцию $\Psi(p)$ представим как

$$\Psi(P)=\frac{2}{\alpha\pi p}\{x_*(1+\ln p)-n\,\mathscr{L}(x_*)-p\alpha_*\}-1,$$

$$\alpha_*=\begin{cases} \sin x_*, & n=1,\\ \frac{1}{2}\left[x_*+\frac{1}{2}\sin(2x_*)\right], & n=2,\\ \left(1-\frac{1}{3}\sin^2 x_*\right)\sin x_*, & n=3,\end{cases}$$

$$x_*=\arccos(p^{-1/n}),$$

где $\mathscr{L}$ — функция Лобачевского,

$$\mathscr{L}(x_*)=-\int_0^{x_*}\ln(\cos x)\,dx=x_*\ln 2-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j-1}\frac{\sin(2x_*j)}{j^2}.$$

Разница между функциями при разных n невелика, а при не слишком больших значениях p ею можно пренебречь.

7. **Выводы.** Используя известную ранее [11] величину максимальной эффективности преобразования энергии фитопланктоном ($\eta_{max}\approx$ $\approx 10\%$ ФАР), получаем среднегодовую плотность потока условной энергии

$$\bar{E}_0=\langle\Pi\rangle\eta_{max}=(12{,}6-0{,}0305\,\varphi-0{,}0014\,\varphi^2)\ \text{МВт/км}^2.$$

Эта величина не намного меньше оцененной ранее [12]. Автор благодарит К. А. Постова (Государственный астрономический институт им. П. К. Штернберга) за критический просмотр статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Straskraba M.//The functioning of freshwater ecosystems/Ed. E. d. Le-Cren, S. W. Lowe-McConnel. Cambridge University Press. Cambridge, 1980. P. 13—84. [2] Беляев В. А., Хусаинова Б. Н.//Биосоляр/Ред. В. В. Алексеев. М., 1984. С. 30—32. [3] Hojerslev N. K.//J. Cons. Int. Explor. Mer. 1982. 40. P. 272—290. [4] Астрономический календарь, постоянная часть/Ред. П. И. Бакулин. 6-е изд. М., 1973. [5] Allen C. W. Astrophysical quantities. The Athlone Press. London, 1973. [6] Lang K. Astrophysical formulae. Vol. 11. Springer-Verlag. W.-Berlin, 1974. [7] Smart W. M. Texc-book on spherical astronomy. Cambridge University Press. Cambridge, 1962. [8] O'Connor D., DiToro D. M.//J. San. Eng. Div. ASCE 1970. SA 2. P. 547—571. [9] Steel J. A.//Math. models in water pollution control./Ed. A. James. Wiley-Interscience. N. Y., 1978. [10] Straskraba M.//Abhandlungen der Ak. Wiss. DDR, Akademie-Verlag. Berlin, 1976. P. 33—66. [11] Baumert H., Uhlmann D.//Int. Revue ges. Hydrobiol. 1983. 68, N 6. P. 753—783. [12] Алексеев В. В. //Биосоляр/Ред. В. В. Алексеев. М., 1984. С. 5—16.

Поступила в редакцию
18.11.85