лазеры/Под ред. И. Мак-Даниеля и У. Нигэна. М., 1986. [5] Holzrichter J. F.// //Nature. 1985. 316, № 6026. P. 309. [6] Hawking S. W.//Phys. Rev. Lett. 1971. 26. P. 1344—1346. [7] Нарликар Дж. Неистовая Вселенная. М., 1985.

Поступила в редакцию
27.12.85
После переработки —
20.11.86

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1987. Т. 28, № 2

УДК 530.1:530.12:531.51

МНОГОМЕРНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ МОДЕЛИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ И СЛАБЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ ВАЙНБЕРГА—САЛАМА С ГРАВИТАЦИЕЙ: ФЕРМИОННЫЙ СЕКТОР

В. В. Кислов

(кафедра теоретической физики)

В предыдущей работе [1] было показано, что бозонный сектор модели Вайнберга—Салама хорошо вкладывается в многомерной римановой геометрии в схему Калуцы—Клейна при обобщении зависимости от дополнительных координат. В 6-мерной теории легко удалось реализовать калибровочные поля с группой $SU(1,1)\times U(1)$. Отмечалось также, что в 7-мерной модели (с топологией внутреннего пространства $S^2\times S^1$) легко описать набор полей с калибровочной группой $SU(2)\times U(1)$. При этом лагранжиан бозонного сектора получался после размерной редукции из лагранжиана

$$\mathscr{L}_B=\sqrt{-G^*}\left[-\frac{1}{2\varkappa}R^*+\Lambda^*\right], \tag{1}$$

где $\sqrt{-G^*}$ — корень из определителя метрического тензора ${}^*G_{AB}$, R^* — многомерная скалярная кривизна, Λ^* — космологическая «постоянная».

Однако оказывается, что в предложенной модели удается геометрически описать не только бозонный сектор, но и взаимодействие внешней спинорной материи со скалярными и векторными полями. При этом исходный лагранжиан зададим в виде суммы геометрической бозонной части и многомерного свободного спинорного лагранжиана. Проиллюстрируем это на примере 6-мерной модели (обобщение на 7-мерный случай проводится аналогичным образом с тем лишь отличием, что из-за иного выбора топологии внутреннего пространства изменится зависимость метрики от дополнительных координат):

$${}^6\mathscr{L}_0={}^6\mathscr{L}_B+{}^6\mathscr{L}_\psi, \tag{2}$$

$${}^6\mathscr{L}_\psi=i\bar{\psi}\Gamma^M\nabla_M\psi+(\text{к. с.})\,^*, \tag{3}$$

где ψ — 8-компонентный спинор, Γ^M — 8×8 матрицы, определяющие образующие алгебры Клиффорда $C(1,5)$ [2], ∇_M — ковариантная производная на 6-мерном римановом многообразии. Представление Γ-матриц выберем согласно [3] в виде

$$\Gamma_\mu=\gamma_\mu\otimes\tau_3;\ \Gamma_5=i\cdot 1\otimes\tau_1;\ \Gamma_6=i\cdot 1\otimes\tau_2, \tag{4}$$

* Для обеспечения действительности лагранжиана (3) вводится комплексно-сопряженное выражение, которое в дальнейших вычислениях явно выписывать уже не будем.

чтобы выполнялось соотношение

$$\Gamma_M\Gamma_N+\Gamma_N\Gamma_M=2G^*_{MN}\cdot I_8,$$

где $M=0, 1, 2, 3, 5, 6$, $\mu=0, 1, 2, 3$, γ_μ — матрицы Дирака, τ_i — матрицы Паули в стандартном представлении, I_8 — единичная 8×8 матрица, $\mathbf{1}$ — единичная 4×4 матрица, т. е.

$$\Gamma_\mu=\begin{pmatrix}\gamma_\mu & 0\\ 0 & -\gamma_\mu\end{pmatrix},\quad \Gamma_5=i\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad \Gamma_6=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}.$$

При этом определяемый на 6-мерном римановом многообразии 8-компонентный дираковский спинор ψ можно разбить на пару 4-компонентных дираковских спиноров:

$$\psi=\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix},\quad \overline{\psi}=\psi^+\Gamma^0=(\overline{\psi}^1,\ -\overline{\psi}^2). \tag{5}$$

Тогда

$$\psi_L^i=\frac{1}{2}(1+i\gamma_5)\psi^i;\quad \overline{\psi}_L^i=\frac{1}{2}\psi^i(1-i\gamma_5);$$

$$\psi_R^i=\frac{1}{2}(1-i\gamma_5)\psi^i;\quad \overline{\psi}_R^i=\frac{1}{2}\psi^i(1+i\gamma_5),$$

где γ_5 определено в виде

$$\gamma_5=i\begin{pmatrix}0 & I_2\\ I_2 & 0\end{pmatrix};\quad I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Тогда исходный спинорный лагранжиан (3) можно записать в виде

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathrm{sp}}&=i\overline{\psi}\,\Gamma^M\nabla_M\psi=i\overline{\psi}_L^1\gamma^\alpha\partial_\alpha\psi_L^1-i\overline{\psi}_L^2\gamma^\alpha\partial_\alpha\psi_L^2+\lambda^5\lambda_\alpha\cdot i\overline{\psi}_L^1\gamma^\alpha\overline{\partial}_5\psi_L^1-\\ &-\lambda^5\lambda_\alpha\cdot i\overline{\psi}_L^2\gamma^\alpha\overline{\partial}_5\psi_L^2+(\sigma^6\sigma_\alpha+\lambda^6\lambda_\alpha)(i\overline{\psi}_L^1\gamma^\alpha\overline{\partial}_6\psi_L^1-i\overline{\psi}_L^2\gamma^\alpha\overline{\partial}_6\psi_L^2)+\\ &+(\overline{\psi}_L^1\overline{\partial}_5\psi_R^2-\overline{\psi}_R^2\overline{\partial}_5\psi_L^1)-i(\overline{\psi}_L^1\overline{\partial}_6\psi_R^2+\overline{\psi}_R^2\overline{\partial}_6\psi_L^1)+(L\leftrightarrow R)^*,\end{aligned} \tag{6}$$

где $\overline{\partial}_5=\lambda^M\nabla_M$, $\overline{\partial}_6=\sigma^M\nabla_M$.

Вспоминая результаты предыдущей работы [1], запишем соотношения между геометрическими величинами и физическими полями модели электрослабых взаимодействий [4]:

$$\sigma_\mu=-\frac{c^2}{2\sqrt{k}}[A_\mu^{(3)}+W_\mu^+e^{+2i\beta x^6}+W_\mu^-e^{-2i\beta x^6}]; \tag{7}$$

$$W_\mu^\pm=\frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu^{(1)}\mp iA_\mu^{(2)});\quad \lambda_\mu=-\frac{c^2}{2\sqrt{k}}B_\mu; \tag{8}$$

$$F_{\mu\nu}^{(i)}=\partial_\mu A_\nu^{(i)}-\partial_\nu A_\mu^{(i)}+g\varepsilon^{ijk}A_\nu^{(j)}A_\mu^{(k)};\quad F_{\mu\nu}=B_{\mu,\nu}-B_{\nu,\mu}; \tag{9}$$

$$g=-2\beta\sigma^6;\ g_1=-2\alpha\lambda^5;\ e=\frac{gg_1}{\sqrt{g^2+g_1^2}};\ [\sin\theta_W=\frac{g}{\sqrt{g^2+g_1^2}}. \tag{10}$$

Оказывается, можно так определить спиноры* $\psi^1{}_L$, $\psi^2{}_L$, $\psi^1{}_R$ и $\psi^2{}_R$ (введя в определения зависимость от x^5 и x^6), чтобы после размерной

---

* Трансформационные свойства спинора ψ при конформных преобразованиях метрики $G^*_{MN}=\Phi\cdot G_{MN}$ определяются так, чтобы все выражение (3) для $\mathcal{L}_{\mathrm{sp}}$ оставалось конформно-инвариантным. Кроме того, в силу выбора представления Г-матриц перемешивание левых и правых спинорных компонент содержится лишь в последних двух членах (6).

редукции исходный лагранжиан (6) описывал свободный спинорный лагранжиан и взаимодействие спиноров с векторными и скалярными полями в модели электрослабых взаимодействий [4]:

$$\mathscr{L}_{\text{sp}}^{(\text{el}-\text{w})}=i\overline{L}\gamma^{\mu}\left(\partial_{\mu}-\frac{ig}{2}\tau_i A_{\mu}^{(i)}+\frac{ig_1}{2}B_{\mu}\right)L+i\overline{R}\gamma^{\mu}(\partial_{\mu}+ig_1 B_{\mu})R-$$

$$-G_e[(\overline{L}\Phi)R+\overline{R}(\Phi^{*}L)], \tag{11}$$

где

$$L=\begin{pmatrix}\nu_L\\ e_L\end{pmatrix};\quad R=e_R;\quad \Phi=\begin{pmatrix}\Phi+\\ \Phi_0\end{pmatrix}^{*}. \tag{12}$$

При этом следует помнить, что взаимодействие спинорных полей с векторными определяется согласно (6) зависимостью спинорных компонент от дополнительных координат. Оказывается справедливым правило: следует брать зависимость этих компонент в виде

$$\psi^{i}(x^{\mu},x^{5},x^{6})=\psi^{i}(x^{\mu})\,e^{im\alpha x^{5}+in\beta x^{6}}, \tag{13}$$

где $m=Y$, $n=2T_3$ (Y — гиперзаряд, T_3 — проекция изоспина), так что заряд Q определяется выражением [5]

$$Q=T_3+\frac{Y}{2}=\frac{m+n}{2}. \tag{14}$$

Тогда спинорные компоненты задаются в виде

$$\psi_L^{i}=a_L^{i}e_Le^{-i\alpha x^{5}-i\beta x^{6}}+b_L^{i}e_Le^{-2i\beta x^{6}}+c_L^{i}e_Le^{-2i\alpha x^{5}}+d_L^{i}\nu_Le^{-i\alpha x^{5}+i\beta x^{6}}+f_L^{i}\nu_L; \tag{15}$$

$$\psi_R^{i}=a_R^{i}(1+g_R^{i}(\chi-\chi_0))\,e_R\cdot e^{-2i\alpha x^{5}}, \tag{16}$$

причем слагаемое с g_R в $\psi^{i}{}_R$ определяет взаимодействие спиноров со скалярными полями:

$$\chi-\chi_0=\Phi_0e^{i\alpha x^{5}-i\beta x^{6}}-\overset{*}{\Phi}_0e^{-i\alpha x^{5}+i\beta x^{6}}+\Phi+e^{i\alpha x^{5}+i\beta x^{6}}-{}^{*}\Phi+e^{-i\alpha x^{5}-i\beta x^{6}}. \tag{17}$$

Легко проверить, что при

$$a_L^1=1;\ b_L^1=-\frac{i}{\sqrt{2}};\ c_L^1=0;\ d_L^1=\sqrt{2};\ f_L^1=i;$$

$$a_L^2=0;\ b_L^2=\frac{1}{\sqrt{2}};\ c_L^2=0;\ d_L^1=1;\ f_L^2=1; \tag{18}$$

$$a_R^1=\sqrt{2};\ a_R^2=1$$

соответствующие члены в (6) и (11), описывающие свободный спинорный лагранжиан и взаимодействие с векторными полями, совпадут после размерной редукции. Членам в квадратных скобках в (11), описывающим взаимодействие с хиггсовскими полями Φ_0 и Φ^+, соответствует пара последних членов в (6), содержащих перемешивание ψ_L и ψ_R. Условие совпадения коэффициентов дает

$$g_R^2=\frac{-2G_e}{g^2+g_1^2}(g+ig_1),$$

$$-\sqrt{2}\,g_R^1(g-ig_1)=g_R^2((\sqrt{2}+1)\,g+i(\sqrt{2}-1)\,g_1), \tag{19}$$

---

* В этом лагранжиане опущены члены, соответствующие правому нейтрино ν_R, не взаимодействующему с калибровочными полями.

что полностью фиксирует выбор коэффициентов в определении (15)—(16). Заметим, что киральность геометрического лагранжиана обеспечивается различным выбором зависимости от дополнительных координат у левых и правых спинорных компонент.

Итак, после размерной редукции исходный лагранжиан (2) принимает вид

$$\mathcal{L}=\sqrt{-g}\,\lambda_5\sigma_6\left\{(\chi_0^2-2\Phi^*\Phi)\left[\frac{1}{2\varkappa}\,{}^4R-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}-\frac{1}{4}F^{(i)}_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_{(i)}\right]+\right.$$
$$+10\left(g^{\mu\nu}\nabla^-_\mu\Phi^*\nabla^+_\nu\Phi-\frac{\lambda^2}{4}\left(\Phi^*\Phi-\eta^2\right)^2\right)+\Lambda_{\rm eff}+i\bar{e}_L\gamma^\mu\partial_\mu e_L+i\bar{\nu}_L\gamma^\mu\partial_\mu\nu_L+$$
$$+i\bar{e}_R\gamma^\mu\partial_\mu e_R-\frac{g_1}{2}\bar{e}_L\gamma^\mu B_\mu e_L-\frac{g_1}{2}\bar{\nu}_L\gamma^\mu B_\mu\nu_L-g_1\bar{e}_R\gamma^\mu B_\mu e_R-\frac{g}{2}\bar{e}_L\gamma^\mu A^{(3)}_\mu e_L+$$
$$+\frac{g}{2}\bar{\nu}_L\gamma^\mu A^{(3)}_\mu\nu_L+\frac{g}{2}\bar{\nu}_L\gamma^\mu\left(A^{(1)}_\mu-iA^{(2)}_\mu\right)e_L+\frac{g}{2}\bar{e}_L\gamma^\mu\left(A^{(1)}_\mu+iA^{(2)}_\mu\right)\nu_L-$$
$$\left.-G_e\left(\bar{e}_L\Phi_0e_R+\bar{e}_R\Phi_0^*e_L+\bar{\nu}_L\Phi^+e_R+\bar{e}_R{}^*\Phi^+\nu_L\right)\right\},\qquad(20)$$

что можно переписать с учетом (12) в эквивалентной форме на языке хиггсовских дублетов:

$${}^6\mathcal{L}=\sqrt{-g}\,\lambda_5\sigma_6\left\{(\chi_0^2-2\Phi^*\Phi)\left[\frac{1}{2\varkappa}\,{}^4R-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}-\frac{1}{4}F^{(i)}_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_{(i)}\right]+\right.$$
$$\left.+D_\mu{}^*\Phi D^\mu\Phi-\frac{\lambda^2}{4}\left(\Phi^*\Phi-\eta^2\right)^2+i\bar{L}\gamma^\mu\widetilde{D}_\mu L+i\bar{R}\gamma^\mu\widehat{D}_\mu R-G_e[(\bar{L}\Phi)R+\bar{R}(\Phi^*L)]\right\},\qquad(21)$$

где $D_\mu=\partial_\mu-\frac{ig}{2}\tau_iA^{(i)}_\mu-\frac{ig_1}{2}B_\mu$,

$$\widetilde{D}_\mu=\partial_\mu-\frac{ig}{2}\tau_iA^{(i)}_\mu+\frac{ig_1}{2}B_\mu,$$

$$\widehat{D}_\mu=\partial_\mu+ig_1B_\mu.$$

Это выражение уже в явном виде содержит лагранжиан модели электрослабых взаимодействий и включает также гравитационный лагранжиан.

Переходя к 7-мерной модели с топологией внутреннего пространства $S^2\times S^1$, нетрудно получить выражение, полностью аналогичное (21) с тем лишь отличием, что член $F^{(i)}_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_{(i)}$ будет описывать поля с калибровочной группой $SU(2)$ вместо $SU(1,1)$.

Быть может, одним из наиболее интересных следствий предложенного подхода является возможность изменений (в том числе космологических) фундаментальных констант теории, и в частности угла Вайнберга. Действительно, недавно Маеда и Нишино [6] показали, что решение (Вселенная Фридмана)$\times$(сфера S^2) является аттрактором для однородных изотропных космологических решений 6-мерной $N=2$ супергравитации (эти же решения применимы в предложенном 6-мерном подходе), т. е. к этому решению асимптотически приближаются все однородные изотропные космологические решения для произвольных начальных условий. При этом радиус дополнительных измерений выходит на постоянное значение. Так как радиус дополнительных измерений связан с константами взаимодействия, результат

Маеды и Нишино позволяет объяснить постоянство угла Вайнберга в настоящую эпоху. В то же время при рассмотрении эволюции ранней Вселенной учет изменений фундаментальных констант становится необходимым.

Существенно нелинейный характер взаимодействия скалярных и векторных полей при больших значениях напряженности поля приводит к ряду новых эффектов и следствий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Кислов В. В.//Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3, Физ. Астрон. 1986. **27**, № 6. С. 29—33. [2] Креммер Е.//Введение в супергравитацию. М., 1985. С. 235—297. [3] Furlan P.//Czech. J. Phys. 1982. **B 32**, N 6. P. 634—644. [4] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Квантовые поля. М., 1980. [5] Окунь Л. Б. Лептоны и кварки. М., 1981. [6] Maeda K., Nishina H.//Phys. Lett. 1985. **B 158**, N 5. P. 381—387.

Поступила в редакцию
15.01.86

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1987. Т. 28, № 2

УДК 530.145.7

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ КАЛИБРОВОЧНО-ИНВАРИАНТНЫХ ЛАГРАНЖИАНОВ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ГРУПП ЛИ

А. П. Демичев, Н. Ф. Нелипа

(НИИЯФ)

1. В настоящее время уделяется большое внимание построению калибровочно-инвариантных лагранжианов. Эта задача решается сравнительно легко в случае полупростых групп симметрии, метрика Киллинга которых не вырождена [1] и может быть использована для построения инвариантов. Для других групп метрика Киллинга оказывается вырожденной, и это приводит к физически неудовлетворительным лагранжианам: они не содержат кинетических членов для части калибровочных полей или не удовлетворяют требованию положительности энергии.

В связи с этим возникает необходимость в методе, позволяющем построить физически удовлетворительные лагранжианы в случае любых групп. В настоящей статье предлагается универсальный метод построения калибровочных инвариантов для любой группы Ли, и из них затем строится лагранжиан и действие теории. Метод опирается на общие теоремы теории расслоенных пространств, а также теории групп преобразований и не связан с модельными предположениями и конкретной спецификой той или иной калибровочной группы.

Сначала мы изложим основы предлагаемого метода, а затем проиллюстрируем его на примере группы $E_3=O(3)\cdot T_3$, где знаком $\cdot$ обозначено полупрямое произведение.

2. Исходным объектом метода является главное расслоенное пространство $P(M, G)$ с четырехмерной базой M и структурной группой G. Обычно [2] при формулировке четырехмерной калибровочной теории поля, соответствующей данному расслоению P, используются локальные формы связности $A_{(\xi)}$ и кривизны $F_{(\xi)}$, т. е. сужения форм связности ω и кривизны Ω, определенных на всем многообразии P, на локальные сечения $\{\sigma_\xi\}$. Локальное сечение — это четырехмерное подмногообразие, диффеоморфное некоторой области $U_\xi\subset M$. Сужения