СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Барут А., Рончка Р. Теория представлений групп и ее приложения. М., 1980. Т. 1. [2] Даниэль М., Виалле С..М.//УФН. 1982. 136, № 3. С. 377—419. [3] Демичев А. П., Нелипа Н. Ф.//Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3, Физ. Астрон. 1985. 26, № 3. С. 20—23. [4] Chaichian M., Demichev A. P., Nelipa N. F. Preprint HU-TFT-84-50. Helsinki, 1986. [5] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. М., 1979. [6] Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. М., 1981. Т. 1. [7] Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М., 1978. [8] Кац Г. И., Коронкевич А. И.//Функциональный анализ и его применения. 1971. 5. С. 78—80.

Поступила в редакцию
29.12.85

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1987. Т. 28, № 2

УДК 530.145.7

КЛАССИФИКАЦИЯ ТЕОРИИ ПОЛЯ И СИНГУЛЯРНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ

В. Б. Гостев, В. С. Минеев, А. Р. Френкин

(кафедра теоретической физики)

Одномерный ангармонический осциллятор $(-\infty<x<\infty,\ \hbar=2m=\omega/2=1)$ со свободным гамильтонианом

$$H_0=-d^2/dx^2+x^2 \tag{1}$$

и четным возмущением, растущим при $x\to\infty: gW=gx^{2n},\ n=2,\ 3\ldots,$ уже давно рассматривался как одномерная модель квантовой теории поля [1, 2], которая содержит многие проблемы, присущие четырехмерным теориям, например известную неустойчивость Дайсона (случай возмущения gx^4 см. в [2]).

В ряде работ (обзор в [1]) был рассмотрен осциллятор (1) с четным возмущением с особенностью при $x\to 0$:

$$\lambda W=\lambda|x|^{-\nu}. \tag{2}$$

Свойства четных решений уравнения Шрёдингера

$$(H_0+\lambda W)\psi=E\psi \tag{3}$$

дают интересную возможность провести близкую аналогию между классификацией полевых теорий [3] и поведением рядов теории возмущений Рэлея—Шрёдингера (ТВ) для сингулярных возмущений осциллятора (2).

Эти свойства таковы.

Для $\nu>2,\ \lambda<0;\ \nu=2;\ \lambda\leqslant-1/4$ имеет место падение на дно ямы (падение на центр) [4, с. 143—146], и поэтому мы считаем эти значения физически недопустимыми и не рассматриваем их (см., однако, [5]).

Для $\nu\geqslant1$ логарифмическая производная всех четных решений уравнения Шрёдингера (3) обращается в бесконечность при $x=0$. Для $0\leqslant\nu<2;\ \nu=2,\ -1/4<\lambda<3/4$ все решения квадратично интегрируемы в окрестности $x=0$. Поэтому требуются дополнительные соображения для выбора четных решений в этой области параметров возмущения. При $0<\nu<1$ можно удовлетворить стандартному для четных решений условию

$$\psi'(0)\psi^{-1}(0)=0 \tag{4}$$

и взять в качестве четных решения уравнения Шрёдингера (3), (2) с условием (4), непрерывно переходящие в четные осцилляторные

$$\psi_m = (m!\Gamma^{-1}(m+1/2))^{1/2}\exp(-x^2/2)L_m^{-1/2}(x^2),$$
$$E_m = 4m+1, \quad m=0, 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

где $L_m^\alpha(y)$ — полином Лагерра.

При $\nu \geqslant 1$ за счет неустранимого бесконечного разрыва $\psi'(0)\psi^{-1}(0)$ при любом выборе четного решения возникает δ-образный сингулярный потенциал [6]. Этот индуцированный сингулярным возмущением (2) потенциал содержит как члены, исчезающие при $\lambda \to 0$, — индуцированное возмущение (ИВ), так и слагаемое, не зависящее от λ, — потенциал сдвига [7]. Сам факт изменения гамильтониана (1) при включении и последующем выключении ($\lambda \to +0$) возмущения (2) для $\nu \geqslant 1$ обнаружен в работе [8] и называется явлением Клаудера [1].

В интервале $1 \leqslant \nu \leqslant 2$ рассматриваются в качестве кандидатов в четные решения два набора. Во-первых, двукратно вырожденные (по четности) продолженные четно решения $\psi_-(x)$ ([1, 8, 9], $\nu=2$), удовлетворяющие условию $\psi(0)=0$ и непрерывно переходящие при $\lambda \to 0$ в нечетные осцилляторные решения ($x>0$)

$$\psi_m(x) = m!\Gamma^{-1}(m+3/2)x\exp(-x^2/2)L_m^{1/2}(x^2),$$
$$E_m = 4m+3, \quad m=0, 1, 2, \ldots \tag{6}$$

Решения $\psi_-(x)$ приводят к потенциалу сдвига

$$V_t = 2\delta(x)|x|^{-1}, \quad 1 \leqslant \nu \leqslant 2, \tag{7}$$

$$V_t = (\nu/2)\delta(x)|x|^{-1}, \quad \nu>2. \tag{8}$$

Формула (8) (вместе с формулой (12)) получается из логарифмической производной функции [4, с. 214, 215]

$$\psi_-(x) \approx Cx^{\nu/4}\exp(-2\sqrt{\lambda}\,(\nu-2)^{-1}x^{(\nu-2)/2}), \quad x \to +0. \tag{9}$$

ИВ, вызванное $\psi_-(x)$, имеет вид

$$W_i = 2\delta(x)|x|^{-1}\sum_{k=1}^{q}\lambda^k g_k(\nu)|x|^{(2-\nu)k}, \quad \nu<2, \tag{10}$$

где $g_k(\nu)$ определяются рекуррентно, $g_1=(3-\nu)^{-1}$, $q=\varepsilon((2-\nu)^{-1})$, $\varepsilon(z)$ — целая часть z,

$$W_i = 2(-1/2+(\lambda+1/4)^{1/2})\delta(x)|x|^{-1}, \quad \nu=2, \quad \lambda>-1/4, \tag{11}$$

$$W_i = 2\lambda^{1/2}\delta(x)|x|^{-\nu/2} + 2\lambda^{1/2}\delta(x)|x|^{-1}\sum_{k=1}^{p}\lambda^{-\frac{k+1}{2}}d_k(\nu)|x|^{\frac{k(\nu-2)}{2}}, \quad \nu>2, \tag{12}$$

$d_k(\nu)$ определяются рекуррентно, $d_1(\nu)=32^{-1}\nu(4-\nu)$, $p=\varepsilon(2(\nu-2)^{-1})$. ИВ (12) переходит в (11) при $\nu \to 2+0$, $\lambda \to +\infty$. ИВ (10) переходит в ряд Тейлора (11) при $\nu \to 2-0$.

Альтернативным кандидатом на четные решения является решение уравнения Шрёдингера (3), (2) $\psi_+(x)$, непрерывно переходящее в функцию (5) при $\lambda \to 0$ ([7, 10], $\nu=2$). Для них отсутствуют сдвиг H_0 (1) (нет явления Клаудера) и вырождение по четности (четные и нечетные уровни чередуются [4, с. 82—86]). ИВ имеет вид ([7], $\nu = 2$, [11])

$$W_i = 0, \quad \nu < 1, \tag{13}$$

$$W_i = 2\lambda \ln |x| \delta(x), \quad \nu = 1, \tag{14}$$

$$W_i = 2\delta(x)|x|^{-1} \sum_{k=1}^{q} \lambda^k h_k(\nu) |x|^{(2-\nu)k}, \quad 1<\nu<2, \ \nu \neq 2-n^{-1}, \tag{15}$$

где $h_k(\nu)$ определяются рекуррентно, $h_1 = -(\nu-1)^{-1}$, $q = \varepsilon((\nu-2)^{-1})$,

$$W_i = 2\delta(x)|x|^{-1} \sum_{k=1}^{q} \lambda^k h_k(\nu) |x|^{(2-\nu)k} + 2\lambda^q f_q(\nu)\, \delta(x) \ln |x|, \tag{16}$$

$$\nu = 2-n^{-1}, \quad n = 2, 3, 4, \ldots,$$

$$W_i = -2(-1/2 + (\lambda+1/4)^{1/2})\delta(x)\,|x|^{-1}, \ \nu = 2, \ -1/4<\lambda<3/4 \tag{17}$$

(если $\lambda \geqslant 3/4$, то $\psi_+(x) \notin L_2(0, \infty)$). Ряд (15) при $\nu \to 2-0$ переходит в разложение потенциала (17) по степеням $\lambda(|\lambda|<1/4)$. При $1<\nu<3/2$ полином по λ в ИВ (15) вырождается:

$$W_i = -2\lambda(\nu-1)^{-1}\delta(x)\,|x|^{1-\nu}. \tag{18}$$

Линейная комбинация $\psi_\alpha = \cos\alpha\psi_+ + \sin\alpha\psi_-$, взятая в качестве четного решения, приводит к ИВ (13)—(17) и дополнительному индуцированному потенциалу

$$V_{t\alpha} = 2\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \delta(x), \tag{19}$$

не отмеченному в [11]. Фиксация угла смешивания $\alpha(\lambda)$ выделяет четное решение. Мы считаем, что потенциал (19), вносящий вклад в матричные элементы (МЭ) возмущения, должен быть отброшен ($\alpha \equiv 0$), исходя из требования наименьшего числа δ-функций в полном индуцированном потенциале, т. е. слабейшей из возможных сингулярностей ИВ и отсутствия потенциала сдвига.

Решения $\psi_+(\lambda, x)$ как функции λ при фиксированном $x>0$ аналитичны по λ, как и уровни энергии (при $\nu=2$ $\psi_+(x)$ существуют при $-1/4<\lambda<3/4$ и аналитичны при $|\lambda|<1/4$). Однако, как было отмечено в [9], все МЭ возмущения

$$W_{mn} = 2\int_0^\infty \psi_m x^{-\nu} \psi_n dx, \tag{20}$$

где $\psi_m(x)$ даются формулой (5), расходятся при $\nu \geqslant 1$. Следовательно, ТВ неприменима, что обесценивает решения $\psi_+(x)$. Однако из-за автоматического включения ИВ (14)—(18), противоположного по знаку затравочному возмущению (2), сходимость МЭ можно восстановить для случая линейного по λ ИВ (14), (18) ($1 \leqslant \nu < 3/2$):

$$W_{mn} = \lim_{a \to +0} 2\int_a^\infty \psi_m (x^{-\nu} - 2(\nu-1)^{-1}|x|^{1-\nu}\delta(x-a))\,\psi_n dx < \infty. \tag{21}$$

Процедура устранения расходимости в МЭ [7] однозначна и близка к процедуре перенормировки в теории поля [3]. При $3/2 \leqslant \nu < 2$; $\nu=2$, $|\lambda|<1/4$ такая процедура применима только к линейной по λ части W_i — коэффициентам первого порядка ТВ. Высшие слагаемые

$(\sim\lambda^2, \lambda^3)$ в МЭ (21) ($\nu\geqslant 3/2$) расходятся, как и коэффициенты ТВ высших порядков. В этом случае ТВ не существует. Однако из сходимости МЭ ($\nu<3/2$) не следует сходимость коэффициентов ТВ, например поправки к уровням энергии второго порядка ([4] с. 163—169)

$$\Delta E_k^{(2)} = \lambda^2 \sum_{n=0}^{\infty}{}' W_{kn}^2 (E_k - E_n)^{-1}. \tag{22}$$

В силу эквидистантности уровней (5) для сходимости ряда (22) достаточно убывания МЭ $W_{kn} \sim n^{-\varepsilon}$ ($\varepsilon>0$, $n\to\infty$).

Оценка роста регуляризованного МЭ (21) дает

$$W_{kn} \sim n^{\frac{1}{2}\left(\nu-\frac{3}{2}\right)}, \quad n\to\infty, \tag{23}$$

т. е. сходимость коэффициентов Рэлея—Шрёдингера имеет место при том же условии, что и сходимость МЭ:

$$\nu<3/2. \tag{24}$$

Оценка (23) несколько видоизменяется для $\nu=2-n^{-1}$, $n=1, 2, \ldots$, например, в кулоновском случае $\nu=1$

$$W_{kn} \sim n^{-1/4} \ln n, \quad n\to\infty. \tag{25}$$

Таким образом, рассматривая МЭ как аналоги вершинных частей, энергетические знаменатели $(E_k - E_n)^{-1}$ — пропагаторов, коэффициенты Рэлея—Шрёдингера — коэффициентов S-матрицы (последняя аналогия для вакуумных диаграмм Фейнмана является фактически точным равенством для энергии основного состояния [1]), мы приходим к следующему соответствию квантовой механики ангармонического осциллятора (1), (2) с собственными функциями $\psi_+(x)$ и квантовой теории поля [3]:

1) случаю $0<\nu<1$ соответствуют суперперенормируемые теории поля с конечным числом расходящихся диаграмм (например, теория с лагранжианом взаимодействия $g\varphi^3$);

2) случаю $1\leqslant\nu<3/2$, когда взаимодействие (2) искажается ИВ (18), соответствуют перенормируемые теории с конечным числом констант перенормировки (в квантовой механике осциллятора производится перенормировка МЭ — аналог перенормировки заряда);

3) случаю $3/2\leqslant\nu<2$; $\nu=2$, $-1/4<\lambda<3/4$, когда взаимодействие дополняется нелинейным ИВ, соответствуют неперенормируемые теории с неустранимыми расходимостями коэффициентов S-матрицы (бесконечное число констант перенормировки).

Отметим, что в последнем случае в квантовой механике осциллятора (1), (3), (15)—(17) существуют решения уравнения Шрёдингера и поправки первого порядка ТВ, совпадающие с соответствующими коэффициентами разложения решений уравнения Шрёдингера (проверено для $\nu=2$ [7]). Этот результат является полным аналогом неперенормируемой четырехфермионной теории слабых взаимодействий, где величины первого порядка совпадают с экспериментальными данными, а высшие поправки расходятся [3].

Можно провести аналогию классификации полевых теорий и с решениями уравнения Шрёдингера $\psi_-(x)$ (радиальными при $0<\nu<\infty$).

Отметим, что в [12] для радиального случая ($0\leqslant r<\infty$) и потенциала $\lambda r^{-\nu}$ дается отличное от нашего соответствие классов теорий поля и волновых функций квантовой механики с взаимодействием (2)

$(x \to r,\ l=0)$. Потенциалам с $0<\nu<2$, не искажающим вид $\psi(r) \sim r$ при $r \to 0$ по сравнению со свободным движением, соответствуют суперперенормируемые теории; случаю $\nu=2$, $\lambda>-1/4$, когда искажается поведение $\psi(r) \sim r^{1/2+\sqrt{\lambda+1/4}}$, $r \to 0$, соответствуют перенормируемые теории; случаю $\nu>2$, когда имеет место падение на центр при $\lambda<0$, — неперенормируемые теории.

На наш взгляд, аналогия поведения МЭ и рядов ТВ потенциальной квантовой механики с пертурбативной теорией поля, основанной на фейнмановском разложении, является более физичной, чем аналогия поведения рядов ТВ для S-матрицы в теории поля и формы волновой функции не квантованной вторично механики радиального движения.

Таким образом, рассмотренная в статье простая задача нерелятивистской квантовой механики дает возможность с помощью изменения всего одного параметра ν на примере МЭ возмущения и коэффициентов Рэлея—Шрёдингера моделировать свойства сходимости элементов S-матрицы пертурбативной квантовой теории поля при различных видах лагранжианов взаимодействия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. М., 1982. Т. 4, гл. 12. [2] Турбинер А. В.//УФН. 1984. 144. С. 35—78. [3] Зюбер Ж.-Б., Ициксон К. Квантовая теория поля. М., 1984. Т. 2, гл. 8. [4] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. М., 1974. [5] Аллилуев С. П.//ЖЭТФ. 1971. 61. С. 15—21. [6] Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. М., 1960. Т. 2. С. 595. [7] Гостев В. Б., Минеев В. С., Френкин А. Р.//ТМФ. 1986. 68. С. 45—57. [8] Klauder J.//Acta Phys. Austriaca Suppl. 1973. 11. P. 341—387. [9] Calogero F.//J. Math. Phys. 1969. 10. P. 2191—2219. [10] Малкин И. А., Манько В. И. Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем. М., 1979. С. 109. [11] Ezawa H., Klauder J., Shepp L.//J. Math. Phys. 1975. 16. P. 783—798. [12] Андреев И. В. Хромодинамика в жесткие процессы при высоких энергиях. М., 1981. С. 123—124.

Поступила в редакцию
14.01.86

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1987. Т. 28, № 2

УДК 538.0

О КВАНТОВЫХ ПОПРАВКАХ В КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ СИНХРОТРОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

И. М. Тернов, В. А. Бордовицын

(кафедра теоретической физики)

Проблема квантовых поправок в теории синхротронного излучения имеет давнюю историю [1—13]. Она остается актуальной и сейчас в связи с предпринимавшейся в работе [6] попыткой ревизии полученных ранее результатов. Обстоятельная критика этой работы была дана в [7—8] (об экспериментальной проверке см. [14]).

Рассмотрим «классический» фурье-образ напряженности поля излучения

$$\widetilde{E}_{\widetilde{\omega}} = \frac{e\widetilde{\omega}}{cR} \int_{-\infty}^{\infty} \beta e^{i[\widetilde{\omega}t-(\mathbf{kr})]}\, dt. \qquad (1)$$

Здесь $e=-e_0<0$ — заряд, $\widetilde{\omega}$ — частота излучения электрона, остальные обозначения совпадают с общепринятыми. Сделаем далее в выра-