рона. Более подробно вопрос о роли собственного магнитного момента в синхротронном излучении исследован в [4]. В деталях структура квантовой поправки $(8/3)\xi^2$ была исследована в работе [5] (см. также [15]). Некоторые из перечисленных выше квантовых поправок рассматривались и в более поздних работах [10—13, 16].

В данной работе мы показали, что все результаты перечисленных выше авторов легко получить разработанным здесь квазиклассическим методом, причем этот метод значительно проще, результативнее, а с физической точки зрения нагляднее, чем квазиклассическая теория синхротронного излучения, построенная в известных монографиях [16, 17].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Соколов А. А., Клепиков Н. П., Тернов И. М.//ЖЭТФ. 1952. **23.** С. 632—640; 1953. **24.** С. 249—252. [2] Schwinger J.//Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1954. **40.** P. 132—136. [3] Соколов А. А., Матвеев А. Н., Тернов И. М.// //ДАН СССР. 1955. **102.** С. 65—68. [4] Матвеев А. Н.//ЖЭТФ. 1956. **31.** С. 479—489. [5] Тернов И. М., Багров В. Г., Рзаев Р. А.//Изв. вузов. Физика. 1963. № 5. С. 127—139; ЖЭТФ. 1964. **46.** С. 374—382. [6] Latal H. G., Erber T.//Ann. Phys. 1977. **108.** P. 408—442. [7] Соколов А. А.//Изв. вузов. Физика. 1980. № 2. С. 46—53. [8] Соколов А. А., Тернов И. М., Жуковский В. Ч., Борисов А. В.//Изв. вузов. Физика. 1979. № 12. С. 44—48. [9] Дербенев Я. С., Кондратенко А. М.//ЖЭТФ. 1973. **64.** С. 1918—1922. [10] Jackson J. D.//Rev. Mod. Phys. 1976. **48.** P. 417—433. [11] Schwinger J., Tsai Wu-yang//Ann. of Phys. (N. Y.). 1978. **110.** P. 63—84. [12] Tsai Wu-yang//Phys. Rev. 1978. **D 18.** P. 3863—3872. [13] Dittrich W.//Nucl. Phys. 1980 **B163.** P. 133—155. [14] Бондарь А. Е., Салдин Е. Л. Препринт ИЯФ 81-41. Новосибирск, 1981. [15] Синхротронное излучение/Ред. А. А. Соколов, И. М. Тернов. М., 1966. [16] Байер В. Н., Катков В. М., Фадин В. С. Излучение релятивистских электронов. М., 1973. [17] Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Квантовая электродинамика. М., 1980.

Поступила в редакцию
10.01.86

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1987. Т. 28, № 2

УДК 536.1

ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ В СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТЕРМОДИНАМИКЕ И ЕЕ ОБОБЩЕНИЕ

И. П. Базаров, П. Н. Николаев

(кафедра квантовой статистики и теории поля)

В настоящее время в статистической термодинамике имеется много развитых методов определения термодинамических функций на основе использования базовых систем и вычисления поправочных членов по теории возмущений. Наиболее широко используемый подход — термодинамическая теория возмущений (ТТВ). Полученные на ее основе результаты хорошо описывают термодинамические свойства различных систем. Вместе с тем в этом подходе существуют трудности принципиального характера. Так, для финитного потенциала взаимодействия он приводит к фазовому переходу не только в двух- и трехмерных системах, но и в одномерных, что противоречит теоретическим выводам об отсутствии такого перехода. Это сильно снижает ценность получаемых с помощью ТТВ результатов, так как становится проблематичным ответить на вопрос: обусловлен ли устанавливаемый ею фазовый переход в двух- и трехмерных системах его фактическим существованием или плохой сходимостью ряда теории возмущений?

Целью данной работы является построение такого разложения в ряд термодинамических функций, которое снимало бы указанное противоречие. При этом получаемые ряды будут обладать большей скоростью сходимости, чем ряды традиционной теории возмущений.

Анализ разложения свободной энергии по теории возмущений как однородных, так и упорядоченных систем показывает, что оно определяется при больших плотностях взаимодействием с ближайшими соседями (для финитного потенциала) или со всем коллективом частиц (для инфинитного потенциала). В статистической физике нас интересует результат вычислений свободной энергии в статистическом пределе, т. е. фактически свободной энергии, приходящейся на одну частицу. Поэтому и теория возмущений должна строиться по аналогичной схеме, учитывающей характер кластеров, получающихся при разложении в ряд свободной энергии, а именно что первый поправочный член пропорционален произведению числа частиц на половину эффективного числа ближайших соседей. Все это мы и учтем при построении теории возмущений.

Рассмотрим систему N частиц в объеме V при температуре T. Потенциальная энергия взаимодействия между частицами пусть будет равна

$$U=\sum_{i<j}\Phi(|q_i-q_j|), \tag{1}$$

где $\Phi(r_{ij})$ — потенциал взаимодействия i-й и j-й частиц.

В этом случае конфигурационный интеграл системы равен

$$Q=\frac{1}{N!}\int\exp(-\beta U)\,dq_1\ldots dq_N, \tag{2}$$

где $\beta=1/kT$ (k — постоянная Больцмана). Пусть мы имеем базовую потенциальную функцию U_0, для которой можно вычислить с высокой степенью точности статистический интеграл, и базовая система достаточно хорошо описывает искомую систему, так что можно говорить о целесообразности использования теории возмущений. Для определенности считаем

$$U_0=\sum_{i<j}\Phi^0(|q_i-q_j|), \tag{3}$$

где $\Phi^0(r_{ij})$ — потенциал взаимодействия между частицами базовой системы. Теперь соотношение (1) можно записать в виде

$$U=\sum_{i<j}\Phi^0(|q_i-q_j|)+\sum_{i<j}\{\Phi(|q_i-q_j|)-\Phi^0(|q_i-q_j|)\}=U_0+\sum_{i<j}\Delta\Phi(q_i,q_j). \tag{4}$$

Зная конфигурационный интеграл, мы можем определить конфигурационную часть свободной энергии системы

$$F=-\Theta\ln Q. \tag{5}$$

Запись потенциала взаимодействия в форме (4) приводит к представлению выражения (5) в виде

$$F=-\Theta\ln Q_0-\Theta\ln(Q/Q_0), \tag{6}$$

где

$$Q_0=\frac{1}{N!}\int\exp(-\beta U_0)\,dq_1\ldots dq_N. \tag{7}$$

Проведенное выше рассмотрение позволяет записать (6) в форме

$$F=F_0-\frac{N\Theta z}{2}\ln q, \tag{8}$$

где

$$F_0=-\Theta\ln Q_0, \qquad q=(Q/Q_0)^{2/Nz}, \tag{9}$$

z — эффективное число ближайших соседей, которое легко определяется при конкретизации постановки задачи. При больших плотностях в однородной фазе ближний порядок подобен ближнему порядку в кристалле. Исходя из этого можно определить z для жидкости.

Для дальнейшего рассмотрения из всех возможных вариантов ТТВ выберем высокотемпературное разложение (обобщение на остальные случаи очевидно). Для его проведения удобно использовать λ-разложение. Введем функцию

$$q(\lambda)=(Q(\lambda)/Q_0)^{2/Nz}, \tag{10}$$

где

$$Q(\lambda)=\int\exp\left\{-\beta\left[U_0+\sum_{i<j}\lambda\Delta\Phi(q_i,q_j)\right]\right\}.$$

Нетрудно видеть, что

$$q(0)=1, \qquad q(1)=q.$$

Разложим функцию $q(\lambda)$ в ряд по λ в точке $\lambda=0$:

$$q(\lambda)=1+\left(\frac{\partial q}{\partial\lambda}\right)_0\lambda+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 q}{\partial\lambda^2}\right)_0\lambda^2+\ldots, \tag{11}$$

где

$$\left(\frac{\partial q}{\partial\lambda}\right)_0=-\frac{2}{Nz}\beta\frac{\rho^2}{2}\int\Delta\Phi(q_1,q_2)F_2^0(q_1,q_2)\,dq_1dq_2$$

и

$$F_2^0(q_1,q_2)=V^2\int\exp(-\beta U_0)\,dq_3\ldots dq_N/Q_0, \quad \rho=N/V=1/v.$$

Полагая в (11) $\lambda=1$ и подставляя в (8), получаем

$$F=F_0-\frac{N\theta z}{2}\ln\left\{1-\frac{\beta\rho^2}{Nz}\int\Delta\Phi(q_1,q_2)F_2^0(q_1,q_2)\,dq_1dq_2+\ldots\right\}. \tag{12}$$

Полученное выражение для свободной энергии есть искомый результат. Он переходит в обычную ТТВ при $z\to\infty$, что имеет место, например, в системе с потенциалом Каца: каждая частица взаимодействует со всем коллективом остальных частиц, и поэтому

$$F=F_0+\frac{\rho^2}{2}\int\Delta\Phi(q_1,q_2)F_2^0(q_1,q_2)\,dq_1,dq_2+\ldots. \tag{13}$$

В последнее время в статистической физике широко используются методы улучшения сходимости рядов теории возмущений. Они позволяют построить функции, описывающие экспериментальные зависимости с высокой степенью точности. Но эмпирический характер этих методов снижает ценность получаемых результатов.

Методы ускоренной сходимости наиболее эффективны, когда они основываются на непосредственном учете свойств системы, следующих из вида ее гамильтониана. Ярким примером этого служит ряд новых результатов нелинейной механики, полученных Н. Н. Боголюбовым [1] методом последовательных замен переменных, обеспечивающих ускоренную сходимость. В случае статистических систем решение задачи об ускорении сходимости сводится к поиску функций, медленно меняющихся с изменением термодинамических параметров. Действительно, если функция достаточно гладкая и медленно меняется, то для ее построения с достаточной степенью точности необходимо меньшее число членов ряда теории возмущений, чем для функции, меняющейся быстро. Именно этим свойством обладает функция q по сравнению с функцией F [2, 3].

Как известно, в системе с потенциалом взаимодействия Каца возможен фазовый переход в системах одного, двух и трех измерений. Расчеты по формуле (13) подтверждают этот результат.

Для финитного потенциала z конечно. Для одномерной системы $z=2$.

Двухчастичная функция распределения слабо зависит от плотности, и при учете первого поправочного члена соотношение (13) переходит в уравнение ван-дер-ваальсовского типа

$$F=F_0-\alpha N\rho, \qquad \alpha=\mathrm{const}>0, \tag{14}$$

что приводит к фазовому переходу вне зависимости от размерности системы.

Полученное же нами выражение (12) для свободной энергии, принимающее в данном приближении вид

$$F=F_0-\frac{N\Theta z}{2}\ln\left\{1+\frac{2\alpha\beta}{zv}\right\}, \tag{15}$$

не приводит к фазовому переходу в одномерной системе. Действительно, возьмем в качестве базовой систему твердых стержней диаметра σ; тогда из выражения (15) в этом случае имеем

$$F=-N\Theta\ln\{e(v-\sigma)\}-N\Theta\ln\{1+\alpha\beta/v\}. \tag{16}$$

Отсюда находим выражение для давления

$$p=-\frac{\partial F}{\partial V}=\frac{\Theta}{v-\sigma}-\frac{\alpha}{v^2+\alpha\beta v}. \tag{17}$$

Производная от давления по объему вычисляется непосредственно и всегда отрицательна, что указывает на невозможность фазового перехода в одномерной системе с финитным потенциалом взаимодействия между частицами:

$$\frac{\partial p}{\partial V}=-\frac{\Theta}{N}\cdot\frac{v^4+\alpha\beta\sigma(2v-\sigma)(2v+\alpha\beta)}{[v(v-\sigma)(v+\alpha\beta)]^2}<0,$$

так как $v\geqslant\sigma$.

Проведенные расчеты показали, что фазовые переходы в ван-дер-ваальсовском приближении имеют место в двух- и трехмерном случаях и приводят к лучшему совпадению с экспериментом теоретических данных, определенных по формуле (15), по сравнению с данными, найденными по формуле (14).

Известно, что уравнение ван-дер-ваальсовского типа получается и из вириального разложения при учете по крайней мере трех вириальных коэффициентов. И оно обладает тем недостатком, что приводит к фазовому переходу в одномерном случае. Предложенное выше обобщение, дающее непротиворечивый результат, применимо и к данному случаю. В результате имеем

$$F=F_0-Nn\Theta\ln\left\{1-\frac{b_2}{v}-\frac{b_3}{v^2}-\ldots\right\}, \tag{18}$$

где

$$b_2=B_2/n,$$

$$b_3=B_3/2n-b_2^2/2,$$

B_i — вириальные коэффициенты, $n=z/2$, F_0 — свободная энергия идеального газа. Для трехмерной системы, реализующей структуру плотной упаковки, $z=12$. Проведенные расчеты показали большую эффективность разложения (18) по сравнению с вириальным разложением.

В заключение отметим: учет того, что член в уравнении Ван-дер-Ваальса, ответственный за притяжение, возрастает с ростом ρ не как ρ^2, а слабее, был осуществлен во втором уравнении Диттеричи, что привело к лучшему описанию критических показателей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М. Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. Киев, 1969. [2] Базаров И. П., Николаев П. Н.//Журн. физ. химии. 1983. **57**, № 7. С. 1609—1617. [3] Базаров И. П., Николаев П. Н. Корреляционная теория кристалла. М., 1981.

Поступила в редакцию
23.01.86

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1987. Т. 28, № 2

УДК 539.12.01

СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ ФЕРМИОНОВ В ПОЛЕ КЕРРА—НЬЮМЕНА С МАГНИТНЫМ ЗАРЯДОМ

Д. В. Гальцов, А. А. Ершов

(кафедра теоретической физики)

В работах [1—3] было показано, что массивные частицы со спином 0 [1, 3] и 1/2 [2] имеют квазистационарные состояния в окрестности черной дыры, описываемой метрикой Керра—Ньюмена с равным нулю магнитным монопольным зарядом. Эта задача приобретает новые нетривиальные особенности в случае, когда дыра имеет также магнитный заряд. Они обусловлены наличием дополнительного электромагнитного вклада в момент количества движения заряда в поле монополя, а также существованием аксиальных аномалий. Известно, что взаимодействие фермионов, обладающих изоспином, приводит к необычным явлениям, связанным со «смешиванием» спина и изоспина [4], в частности к феномену монопольного катализа распада протона [5, 6]. В связи с этим представляет интерес рассмотреть взаимодействие заряженных фермионов с черной дырой, обладающей помимо электрического также магнитным зарядом. Ниже строятся приближенные решения уравнения Дирака для заряженного поля спина 1/2 в поле дайона Керра—Ньюмена с электрическим зарядом Q и магнитным зарядом P. Найдены формулы для энергий квазистационарных состояний с учетом возможности их распада вследствие туннелирования в черную дыру. Обсуждается вопрос о существовании нулевых мод, по-