щение, дающее непротиворечивый результат, применимо и к данному случаю. В результате имеем

$$F=F_0-Nn\Theta\ln\left\{1-\frac{b_2}{v}-\frac{b_3}{v^2}-\ldots\right\}, \tag{18}$$

где

$$b_2=B_2/n,$$

$$b_3=B_3/2n-b_2^2/2,$$

B_i — вириальные коэффициенты, $n=z/2$, F_0 — свободная энергия идеального газа. Для трехмерной системы, реализующей структуру плотной упаковки, $z=12$. Проведенные расчеты показали большую эффективность разложения (18) по сравнению с вириальным разложением.

В заключение отметим: учет того, что член в уравнении Ван-дер-Ваальса, ответственный за притяжение, возрастает с ростом ρ не как ρ^2, а слабее, был осуществлен во втором уравнении Диттеричи, что привело к лучшему описанию критических показателей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М. Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. Киев, 1969. [2] Базаров И. П., Николаев П. Н.//Журн. физ. химии. 1983. 57, № 7. С. 1609—1617. [3] Базаров И. П., Николаев П. Н. Корреляционная теория кристалла. М., 1981.

Поступила в редакцию
23.01.86

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1987. Т. 28, № 2

УДК 539.12.01

СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ ФЕРМИОНОВ В ПОЛЕ КЕРРА—НЬЮМЕНА С МАГНИТНЫМ ЗАРЯДОМ

Д. В. Гальцов, А. А. Ершов

(кафедра теоретической физики)

В работах [1—3] было показано, что массивные частицы со спином 0 [1, 3] и 1/2 [2] имеют квазистационарные состояния в окрестности черной дыры, описываемой метрикой Керра—Ньюмена с равным нулю магнитным монопольным зарядом. Эта задача приобретает новые нетривиальные особенности в случае, когда дыра имеет также магнитный заряд. Они обусловлены наличием дополнительного электромагнитного вклада в момент количества движения заряда в поле монополя, а также существованием аксиальных аномалий. Известно, что взаимодействие фермионов, обладающих изоспином, приводит к необычным явлениям, связанным со «смешиванием» спина и изоспина [4], в частности к феномену монопольного катализа распада протона [5, 6]. В связи с этим представляет интерес рассмотреть взаимодействие заряженных фермионов с черной дырой, обладающей помимо электрического также магнитным зарядом. Ниже строятся приближенные решения уравнения Дирака для заряженного поля спина 1/2 в поле дайона Керра—Ньюмена с электрическим зарядом Q и магнитным зарядом P. Найдены формулы для энергий квазистационарных состояний с учетом возможности их распада вследствие туннелирования в черную дыру. Обсуждается вопрос о существовании нулевых мод, поставленный в работе [7]. Показано, что имеются решения уравнения Дирака, несингулярные на горизонте событий и убывающие на бесконечности, которые аналогичны модам Джекива—Ребби [4], однако в отличие от последних не являются нормируемыми из-за расходимости нормировочного интеграла на горизонте событий черной дыры.

Рассмотрим уравнение Дирака

$$\{i\gamma^{\nu}(\nabla_{\nu}+ieA_{\nu})-\mu\}\Psi=0, \tag{1}$$

где компоненты Ψ и их проекции на ζ обозначим как

$$\Psi=\begin{pmatrix}\chi^A\\ \bar{\xi}_{\dot{A}}\end{pmatrix} \text{ и } \begin{cases}\chi^A=\chi^a\zeta_a^A\\ \xi_A=\xi^a\zeta_{aA}\end{cases}$$

и $\zeta_a^A=\begin{pmatrix}0^A\\ \iota^A\end{pmatrix}$— спинорный базис Ньюмена—Пенроуза.

Тетраду, соответствующую геометрии дайона Керра — Ньюмена, можно выбрать в виде

$$l^{\mu}=\frac{1}{\Delta}\{r^2+a^2,\ \Delta,\ 0,\ a\},$$

$$n^{\mu}=\frac{1}{2\Sigma}\{r^2+a^2,\ -\Delta,\ 0,\ a\},$$

$$m^{\mu}=\frac{1}{\sqrt{2}\,\bar{\rho}}\left\{ia\sin\theta,\ 0,\ 1,\ \frac{i}{\sin\theta}\right\}$$

в координатах Бойера—Линдквиста, где

$$\Delta=(r-r_+)(r-r_-),\ r_{\pm}=M\pm\sqrt{M^2-a^2-Q^2-P^2}\ ,\ \ \Sigma=\bar{\rho}\,\bar{\rho}^*,$$

$$\bar{\rho}=r+ia\cos\theta,$$

M — масса, $a=J/M$, J — угловой момент черной дыры.

Вектор-потенциал электромагнитного поля черной дыры выберем в виде

$$A_{\mu}dx^{\mu}=\frac{Qr-Pa\cos\theta}{\Sigma}(dt-a^2\sin^2\theta d\varphi)-P(\xi-\cos\theta)\,d\varphi,$$

где $\xi=0,\ \pm1$ соответствует различным типам калибровки.

Тогда уравнение (1) допускает разделение переменных в виде

$$\chi^0=\frac{1}{\sqrt{2}\,\bar{\rho}^*}e^{-i\omega t+im\varphi}S_-(\theta)R_-(r),\ \ \bar{\xi}^{\dot{0}}=-\frac{1}{\sqrt{2}\,\bar{\rho}}e^{-i\omega t+im\varphi}S_+(\theta)R_-(r),$$

$$\chi^1=\frac{1}{\sqrt{\Delta}}e^{-i\omega t+im\varphi}S_+(\theta)R_+(r),\ \ \bar{\xi}^{\dot{1}}=\frac{1}{\sqrt{\Delta}}e^{-i\omega t+im\varphi}S_-(\theta)R_+(r), \tag{2}$$

и для функций $R_{\pm}$ и $S_{\pm}$ получаем уравнения

$$\mathscr{L}_{\frac{1}{2}+eP}S_+=(-\lambda+a\mu\cos\theta)S_-,$$

$$\mathscr{L}^+_{\frac{1}{2}-eP}S_-=(\lambda+a\mu\cos\theta)S_+; \tag{3}$$

$$\sqrt{\Delta}\mathscr{D}_0R_-=(\lambda+i\mu r)R_+,$$

$$\sqrt{\Delta}\mathscr{D}_0^+R_+=(\lambda-i\mu r)R_-, \tag{4}$$

где

$$\mathcal{L}_s^{(+)} = \partial_\theta \underset{(-)}{+} \frac{m-\xi eP}{\sin\theta} + s\operatorname{ctg}\theta \underset{(+)}{-} a\omega\sin\theta,$$

$$\mathcal{D}_n^{(+)} = \partial_r \underset{(+)}{-} \frac{i}{\Delta} K(r) + 2n\,\frac{r-M}{\Delta},$$

$$K(r) = \omega(r^2+a^2) - eQr - a(m-\xi eP).$$

При $a=0$ решением (3) являются спиновые сферические гармоники

$$S_-|_{a=0} = -{}_jY^{m-\xi eP}_{-\frac{1}{2}+eP}\cdot\operatorname{sign}\lambda, \qquad S_+|_{a=0} = {}_jY^{m-\xi eP}_{\frac{1}{2}+eP} \tag{5}$$

с собственными значениями $\lambda = \pm\sqrt{(j+1/2)^2-(eP)^2}$.

Введем также орбитальное квантовое число l:

$$j = l \mp 1/2.$$

При $eP=0$ для собственных значений λ имеем [8]

$$\lambda = -[j(j+1) - l(l+1) + 1/4] = \begin{cases} +l, & j = l-1/2, \\ -(l+1), & j = l+1/2. \end{cases}$$

Квадрированные уравнения (4):

$$\left\{\Delta\mathcal{D}^+_{1/2}\mathcal{D}_0 - \frac{\Delta}{r-i\lambda/\mu}\mathcal{D}_0 - \mu^2r^2 - \lambda^2\right\} R_- = 0,$$
$$\left\{\Delta\mathcal{D}_{1/2}\mathcal{D}^+_0 - \frac{\Delta}{r+i\lambda/\mu}\mathcal{D}^+_0 - \mu^2r^2 - \lambda^2\right\} R_+ = 0. \tag{6}$$

Видно, что эти уравнения имеют 4 особые точки: r_-, r_+, $\pm i\lambda/\mu$, ∞ $\left(\text{далее } \widetilde{\lambda} = \frac{\lambda}{\mu(r_+-r_-)}\right)$ и знак перед $i\lambda$ соответствует $R_\mp$. Точного решения этих уравнений в виде известных специальных функций нет. Несложно найти решение в виде ряда, однако для практических целей удобнее построить приближенное решение, сшивая решения уравнений (6), найденные вблизи особых точек. Для спинорного поля такая процедура возможна в физически интересном случае: $\mu M \ll |\lambda|$ — для микроскопических черных дыр.

В этом приближении имеем следующие решения вблизи особых точек:

$$R_-^{(-1,0)} = \vec{A}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{i\Gamma} F\left(k_0,\ -k_0,\ \frac{1}{2}+2i\Gamma,\ -x\right) + $$
$$+ \overleftarrow{A}\sqrt{x(x+1)}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{-i\Gamma} F\left(1+k_0,\ 1-k_0,\ \frac{3}{2}-2i\Gamma,\ -x\right), \tag{7}$$

$$R_-^{(i\widetilde{\lambda})} = B_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1-\dfrac{2k_0}{2k_0-1}\,y \end{Bmatrix} y^{-k_0} + B_2 \begin{Bmatrix} 1-\dfrac{2k_0}{2k_0+1}\,y \\ 1 \end{Bmatrix} y^{k_0}, \tag{8}$$

$$R_-^{(\infty)} = C_1 W_{qk}(z) + C_2 M_{qk}(z), \tag{9}$$

где введены переменные

$$x=\frac{r-r_+}{r_+-r_-},\quad y=-i\mu r/\lambda,\quad z=2\sqrt{\mu^2-\omega^2}\,r$$

и обозначения

$$k_0=|\lambda|,\quad k=k_0+\frac{1}{2}\operatorname{sign}\lambda,$$

$$q=[(2\omega^2-\mu^2)M-\omega eQ]/\sqrt{\mu^2-\omega^2},\quad \Gamma=K(r_+)/(r_+-r_-)$$

(F — гипергеометрическая функция ${}_2F_1(a,b,c,x)$). В качестве конфлюентных гипергеометрических функций выбраны функции Уиттекера $W_{qk}(z)$, $M_{qk}(z)$. В (8) и далее верхнее значение в фигурных скобках соответствует $j=l-1/2$, нижнее — $j=l+1/2$.

Асимптотическое поведение функций (7)—(9):

$$R_-^{(-1,0)}\xrightarrow[x\to\infty]{}\widetilde{A}_1x^{-k_0}+\widetilde{A}_2x^{k_0},$$

$$R_-^{(i\widetilde{\lambda})}\xrightarrow[y\to 0]{}B_1y^{-k_0}+B_2y^{k_0},\tag{10}$$

$$R_-^{(i\widetilde{\lambda})}\xrightarrow[y\to\infty]{}B_1\begin{Bmatrix}1\\ -\dfrac{2k_0}{2k_0-1}y\end{Bmatrix}y^{-k_0}+B_2\begin{Bmatrix}-\dfrac{2k_0}{2k_0+1}y\\ 1\end{Bmatrix}y^{k_0},$$

$$R_-^{(\infty)}\xrightarrow[z\to 0]{}\widetilde{C}_1z^{\frac{1}{2}-k}+\widetilde{C}_2z^{\frac{1}{2}+k},$$

где

$$\widetilde{A}_1=\vec{A}\,\frac{\Gamma(-2k_0)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+2i\Gamma\right)}{\Gamma(-k_0)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-k_0\right)}+\overleftarrow{A}\,\frac{\Gamma(-2k_0)\,\Gamma\left(\frac{3}{2}-2i\Gamma\right)}{\Gamma(1-k_0)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-k_0\right)},$$

$$\widetilde{A}_2=\vec{A}\,\frac{\Gamma(2k_0)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+2i\Gamma\right)}{\Gamma(k_0)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+k_0\right)}+\overleftarrow{A}\,\frac{\Gamma(2k_0)\,\Gamma\left(\frac{3}{2}-2i\Gamma\right)}{\Gamma(1+k_0)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+k_0\right)},$$

$$\widetilde{C}_1=C_1\Gamma(2k)/\Gamma\left(\frac{1}{2}-q+k\right),\tag{11}$$

$$\widetilde{C}_2=C_2+C_1\begin{cases}\Gamma(2k)/\Gamma\left(\dfrac{1}{2}-q-k\right), & 2k\notin N,\\[2ex] \dfrac{(-1)^{2k+1}\,\Psi\left(\frac{1}{2}-q+k\right)}{\Gamma(2k+1)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-q-k\right)}, & 2k\in N.\end{cases}$$

Из (10) видно, что решения сшиваются.

Для нахождения спектра квазистационарных состояний и величины затухания энергетических уровней необходимо на коэффициенты сшивки (11) наложить следующие условия: $\omega<\mu$ — энергия частицы в связанном состоянии меньше энергии свободной частицы; $1/2-q+k=$

$=-n_r+\nu$ — условие квантования, предполагается, что $|\nu|\ll n_r$, $n_r\in N$; $C_2=0$ — коэффициент при экспоненциально растущем на бесконечности члене в (9); $\vec{A}=0$ — естественное для черной дыры граничное условие; отсутствие потока частиц из-под горизонта событий.

При наложении этих условий энергия спинорной частицы будет иметь вид $\omega=\omega_n+\delta-i\gamma$, где $\omega_n=\mu[1-(\mu M-eQ)^2/2n^2]$ — кулоновский спектр, $n=n_r+k+1/2$ — главное квантовое число, γ характеризует величину затухания квазистационарных состояний, δ — сдвиг энергетических уровней в поле монополя.

Для γ и δ получаем

$$\gamma+i\delta=-i\nu\mu(\mu M-eQ)^2n^{-3}=$$

$$=\mu(\mu M)^{2k_0}\left\{\frac{\dfrac{(\mu M-eQ)^{2k_0+3}\Gamma(n+k_0+1)}{(n-k_0-1)!\,n^{2k_0+4}[\Gamma(2k_0+1)]^2}}{\dfrac{(\mu M-eQ)^{2k_0+1}\Gamma(n+k_0)}{(n-k_0)!\,n^{2k_0+2}[\Gamma(2k_0)]^2}}\right\}\times$$

$$\times\{1-i\,\mathrm{tg}\,\pi k_0\,\mathrm{th}\,2\pi\Gamma\}\prod_{\substack{p=0\\p'=1}}^{\infty}\left[\frac{1-4\Gamma^2/(p'-1/2)^2}{1-4\Gamma^2/(p+k_0+1/2)^2}\right]. \qquad (12)$$

Так как $\gamma>0$, то квазисвязанные состояния являются устойчивыми, кроме того, время жизни спинорной частицы в этом состоянии $\tau=1/\gamma$ оказывается много большим времени, характерного для орбитального движения.

Если устремить $eP\to0$, то k_0 становится целым числом:

$$k_0=|\lambda|=\begin{cases}l, & j=l-1/2,\\ l+1, & j=l+1/2,\end{cases}$$

и (12) переходит в

$$\delta=0,$$

$$\gamma=\mu(\mu M)^{2k_0}(\mu M-eQ)^{2l+3}\frac{(n+l)!}{(n-l-1)!\,n^{2l+4}}\left\{\frac{(2l)!}{(2l+1)!}\right\}^{-2}\prod_{p=1}^{k_0}\left[1-\frac{4\Gamma^2}{(p-1/2)^2}\right], \qquad (13)$$

т. е. в выражение, полученное ранее в [2]. Новым эффектом является появление сдвига энергетических уровней фермионов в поле магнитного монополя.

В предыдущих выкладках было существенно, что $\lambda\neq0$. Это всегда так при $eP=0$. Однако при рассмотрении заряженных фермионов в поле черной дыры, обладающей магнитным зарядом, собственное значение $\lambda=\pm\sqrt{(j+1/2)^2-(eP)^2}$ может быть равным нулю. Поэтому на случае $\lambda=0$ необходимо остановиться отдельно.

В плоской геометрии фермионные моды с $\lambda=0$ хорошо известны [4], и их существование приводит к нетривиальным следствиям, в частности к эффекту Рубакова — Каллана [5, 6]. В [4] показано существование решения уравнения Дирака в поле монополя, обладающего нулевой энергией, самосопряженного и нормируемого. Поэтому при вторичном квантовании это решение должно быть включено в полный набор, составляющий базис гильбертова пространства. Наличие в гильбертовом пространстве функции с нулевой энергией приводит к вырождению вакуума, появлению у монополя полуцелого фермионного числа, «смешиванию» спина и изоспина и дальнейшим следствиям.

Вопрос о существовании мод, аналогичных модам Джекива—Ребби, в искривленном пространстве-времени рассматривался в работе [7]. В [7] высказывается уверенность в существовании этих мод и в связи с этим делается вывод о существовании у черных дыр фермионной структуры. Однако в этой работе не приводится конкретное решение уравнения Дирака.

Поэтому рассмотрим уравнения (4) при следующих значениях параметров:

$$\lambda=0, \quad \omega=0, \quad a=Q=0, \quad \mu\neq 0, \quad eP\neq 0.$$

В этом случае система (4) точно решается, и решение, несингулярное на горизонте событий и убывающее на пространственной бесконечности, имеет вид

$$R_- = \exp\left\{-\mu \int \frac{rdr}{\sqrt{\Delta}}\right\},$$

$$R_+ = i\exp\left\{-\mu \int \frac{rdr}{\sqrt{\Delta}}\right\}.$$

Не противоречит ли существование подобных решений известной теореме об отсутствии «волос» у черных дыр? При доказательстве этой теоремы [9] было существенно, что $\lambda\neq 0$. В настоящем же случае мы имеем дело именно с нулевым собственным значением, т. е. опираться на доказательство [9] мы не можем. Однако нетрудно заметить, что найденное решение является ненормируемым из-за расходимости на горизонте событий:

$$\|\Psi\| = \int \bar{\Psi}\gamma^0\Psi\sqrt{-g}\,d^3x = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp[-2\mu\hat{r}]\,dr^* = \infty$$

(где переменные $\hat{r}$ и r^* определены как $d\hat{r}/dr = r/\sqrt{\Delta}$ и $dr^*/dr = (r^2+a^2)/\Delta$) и поэтому не может входить в базис гильбертова пространства. Следовательно, на вопрос о существовании у черных дыр фермионной структуры нужно ответить отрицательно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Тернов И. М., Халилов В. Р., Чижов Г. А., Гаина А. Б.//Изв. вузов. Физика. 1978. № 9. С. 109—114. [2] Тернов И. М., Гаина А. Б., Чижов Г. А.//Там же. 1980. № 8. С. 56—62. [3] Detweiler S.//Phys. Rev. 1980. **D22**. P. 2323—2330. [4] Jackiw R., Rebbi C.//Phys. Rev. Lett., 1976. **36**. P. 1116—1119. [5] Рубаков В. А.//Письма в ЖЭТФ. 1981. **33**. С. 658—660. [6] Callan C. G.//Phys. Rev. 1982. **D25**. P. 2141—2146. [7] Lohiya D.//Ann. Phys. 1983. **145**. P. 116—130. [8] Suffern K. G., Fackerell E. D., Cosgrove C. M.//J. Math. Phys. 1983. **24**. P. 1350—1358. [9] Teitelboim C.//Phys. Rev. 1972. **D5**. P. 2941—2954.

Поступила в редакцию
24.01.86