ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 530.145.7

КАЛИБРОВОЧНО-ИНВАРИАНТНЫЙ ЛАГРАНЖИАН ДЛЯ ГРУППЫ ПУАНКАРЕ

А. П. Демичев, Н. Ф. Нелипа

(НИИЯФ)

1. В предыдущей работе [1] нами предложен универсальный метод построения калибровочно-инвариантных лагранжианов для любых групп Ли. Цель настоящей работы — построить с помощью предложенного метода удовлетворяющее физическим требованиям действие для локальной группы Пуанкаре, которой в последнее время уделяется большое внимание (см. обзоры [2, 3] и ссылки в них).

Отметим, что в этой статье мы не будем использовать метод в полном объеме, так как с физической точки зрения наибольший интерес представляет лагранжиан, содержащий компоненты кривизны расслоенного пространства в степени не выше второй. Кроме того, нахождение всех калибровочных инвариантов для группы Пуанкаре хотя и возможно, но является весьма громоздкой задачей. Поэтому мы ограничимся здесь только квадратичными по кривизне лагранжианами.

В п. 2 перечислены основные величины, из которых строятся инварианты, законы преобразования этих величин и находится система уравнений, определяющая инварианты калибровочной группы. В п. 3 найдено выражение для действия в случае точной калибровочной симметрии, а в п. 4 — в случае спонтанно нарушенной симметрии. В п. 5 кратко обсуждаются свойства полученного действия.

2. В качестве исходного объекта возьмем главное расслоенное пространство $P(M, \mathscr{P})$ с четырехмерной базой M и структурной группой Пуанкаре $\mathscr{P}$. Стандартные коммутационные соотношения алгебры Ли группы $\mathscr{P}$ имеют вид

$$\begin{aligned}
&[I_{\alpha\beta}, I_{\gamma\delta}] = \eta_{\beta\gamma} I_{\alpha\delta} + \eta_{\alpha\delta} I_{\beta\gamma} - \eta_{\alpha\gamma} I_{\beta\delta} - \eta_{\beta\delta} I_{\alpha\gamma},\\
&[I_{\alpha\beta}, P_\gamma] = \eta_{\beta\gamma} P_\alpha - \eta_{\alpha\gamma} P_\beta, \qquad (1)\\
&[P_\alpha, P_\beta] = 0,\\
&\eta = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1);\ \alpha, \beta, \gamma, \delta = 0, \ldots, 3.
\end{aligned}$$

Как будет видно, теорию с динамическими полями трансляций (т. е. с полями, действие для которых содержит знакоопределенную квадратичную форму кинетической энергии) можно построить лишь в случае спонтанного нарушения группы $\mathscr{P}$ до подгруппы $O(1, 3)$. Поэтому в соответствии с работой [1] в рассматриваемом случае калибровочно-инвариантное действие может быть построено из следующих величин:

— компонент $R^{\alpha\beta}$, $\mathscr{R}^\alpha$ локальной формы кривизны $F_{(\xi)} = R^{\alpha\beta} I_{\alpha\beta} + \mathscr{R}^\alpha P_\alpha$ главного расслоения $P(M, \mathscr{P})$;

— координат $y^\alpha(x)$ сечений $\{Y_\tau\}$ расслоения P, связанных преобразованием однородной подгруппы: $Y_\varkappa = Y_\rho \cdot h(x)$, где $h \subset O(1, 3)$, $x \in U_\varkappa \cap U_\rho$; $U_\varkappa$, U_ρ — области в базе M, диффеоморфные $Y_\varkappa$, Y_ρ;

— компонент $R_Y^{\alpha\beta}$, $\mathscr{R}_Y^\alpha$ формы кривизны на сечениях $\{Y_\tau\}$;

— компонент $A^{\alpha}{}_{Y}$ формы связности $\omega_Y = A_Y^{\alpha\beta} I_{\alpha\beta} + A_Y^{\alpha} P_{\alpha}$ на сечениях $\{Y_\tau\}$;

— компонент V^{α} тензорной 1-формы V [4], дуальной к касательному реперу.

Появление последней величины объясняется тем, что $\mathcal{P}$ является пространственно-временной группой, связанной с расслоением реперов. В соответствии с определением [4], при произвольном изменении локальных сечений $\sigma_\xi \to \sigma_\xi \cdot g$, $g \in \mathcal{P}$, эта форма преобразуется однородной подгруппой $O(1, 3) \subset \mathcal{P}$:

$$V'^{\alpha} = O^{\alpha}_{\beta} V^{\beta}, \tag{2}$$

где $O_{\beta}{}^{\alpha}$ — матрица векторного представления группы $O(1, 3)$. Так как форма V^{α} инвариантна относительно подгруппы трансляций, то безразлично, на какую совокупность сечений ($\{\sigma_\xi\}$ или $\{Y_\tau\}$) ее редуцировать.

Используя приведенные в [1] законы преобразования форм $R^{\alpha\beta}$, $\mathcal{R}^{\alpha}$, $R_Y{}^{\alpha\beta}$, $\mathcal{R}^{\alpha}{}_{Y}$, y^{α}, $A^{\alpha}{}_{Y}$, а также соотношение (2), можно построить матрицу (таблица) системы уравнений [1, (10)], определяющей инварианты калибровочной группы. В таблице не приведены формы, дуальные к указанным выше, так как они преобразуются по тому же закону, что и исходные.

3. Сначала рассмотрим случай ненарушенной калибровочной симметрии, к которому приводит учет форм $R^{\alpha\beta}$, $\mathcal{R}^{\alpha}$. Используя таблицу и формулы [1, (8)], [1, (9)], находим, что форма $\mathcal{R}^{\alpha}$ в выражения для инвариантов не входит, а из форм $R^{\alpha\beta}$ можно построить два инварианта:

$$f_1 = R^{\alpha\beta} \wedge R^{\alpha\beta}, \quad f_2 = R^{\alpha\beta} \wedge R^{\gamma\delta} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}.$$

Добавление дуальных форм дает восемь новых инвариантов; из них только четыре квадратичны по кривизне:

$$f_3 = * R^{\alpha\beta} * R^{\alpha\beta}, \quad f_4 = * R^{\alpha\beta} \wedge * R^{\gamma\delta} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta},$$

$$f_5 = * R^{\alpha\beta} \wedge R^{\alpha\beta}, \quad f_6 = * R^{\alpha\beta} \wedge R^{\gamma\delta} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}.$$

Действие, соответствующее инвариантам $f_1, \ldots, f_6$, имеет вид

$$S[R] = \int (R^{\alpha\beta}_{mn} R^{\alpha\beta}_{pq} \mathcal{G}^{mnpq}_{1,2} + R^{\alpha\beta}_{mn} R^{\gamma\delta}_{pq} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \mathcal{G}^{mnpq}_{3,4}) \, d^4x,$$

где $\mathcal{G}^{mnpq}_{i,j} \equiv a_i \varepsilon^{mnpq} + a_j g^{mp} g^{nq} \sqrt{g}$; a_i, a_j — произвольные константы; $g_{mn} = V^{\alpha}{}_{m} \eta_{\alpha\beta} V_n{}^{\beta}$ — метрический тензор на базе M, $g = -\det g_{mn}$.

Ненарушенной симметрии отвечает также действие, построенное с учетом 1-форм V^{α}, $* V^{\alpha}$. Это объясняется тем, что трансформационные свойства этих форм по их определению [4] не зависят от того, на какую совокупность сечений ($\{\sigma_\alpha\}$ или $\{Y_\tau\}$) они редуцированы. Для того чтобы построить квадратичное по кривизне действие с учетом этих форм, заметим, что форма, инвариантная относительно группы $O(1, 3)$ и содержащая кривизну $\mathcal{R}^{\alpha}$, имеет общий вид

$$f = h_{\alpha\beta\gamma\delta} \mathcal{R}^{\alpha} \wedge \mathcal{R}^{\beta} \wedge V^{\gamma} \wedge V^{\delta} + h'_{\alpha\beta\gamma\delta} \mathcal{R}^{\alpha} \wedge * \mathcal{R}^{\beta} \wedge V^{\gamma} \wedge V^{\delta} +$$

$$+ h''_{\alpha\beta\gamma\delta} \mathcal{R}^{\alpha} \wedge \mathcal{R}^{\beta} \wedge * V^{\gamma} \wedge * V^{\delta} + \ldots$$

Здесь h, h', h'' — $O(1, 3)$ — инвариантные тензоры, а многоточие обозначает аналогичные величины со всевозможными расстановками оператора дуальности. С помощью таблицы можно убедиться, что все та-

Матрица M системы дифференциальных уравнений, определяющей калибровочные инварианты группы Пуанкаре

	R^{01}	R^{02}	R^{03}	R^{12}	R^{13}	R^{23}	$\mathcal{R}^0$	$\mathcal{R}^1$	$\mathcal{R}^2$	$\mathcal{R}^3$	V^0	V^1	V^2	V^3	y^0	y^1	y^2	y^3
I_{01}	0	$-2R^{12}$	$-2R^{13}$	$-2R^{02}$	$-2R^{03}$	0	$-\mathcal{R}^1$	$-\mathcal{R}^0$	0	0	$-V^1$	$-V^0$	0	0	$-y^1$	$-y^0$	0	0
I_{02}	$2R^{12}$	0	$-2R^{23}$	$2R^{01}$	0	$-2R^{03}$	$-\mathcal{R}^2$	0	$-\mathcal{R}^0$	0	$-V^2$	0	$-V^0$	0	$-y^2$	0	$-y^0$	0
I_{03}	$2R^{13}$	$2R^{23}$	0	0	$2R^{01}$	$2R^{02}$	$-\mathcal{R}^3$	0	0	$-\mathcal{R}^0$	$-V^3$	0	0	$-V^0$	$-y^3$	0	0	$-y^0$
I_{12}	$-2R^{02}$	$2R^{01}$	0	0	$-2R^{23}$	$2R^{13}$	0	$-\mathcal{R}^2$	$\mathcal{R}^1$	0	0	$-V^2$	V^1	0	0	$-y^2$	y^1	0
I_{13}	$-2R^{03}$	0	$2R^{01}$	$2R^{23}$	0	$-2R^{12}$	0	$-\mathcal{R}^3$	0	$\mathcal{R}^1$	0	$-V^3$	0	V^1	0	$-y^3$	0	y^1
I_{23}	0	$-2R^{03}$	$2R^{02}$	$-2R^{13}$	$2R^{12}$	0	0	0	$-\mathcal{R}^3$	$\mathcal{R}^2$	0	0	$-V^3$	V^2	0	0	$-y^3$	y^2
P_0							0	$2R^{01}$	$2R^{02}$	$2R^{03}$					1	0	0	0
P_1				0			$2R^{01}$	0	$-2R^{12}$	$-2R^{13}$		0			0	1	0	0
P_2							$2R^{02}$	$2R^{12}$	0	$-2R^{23}$					0	0	1	0
P_3							$2R^{03}$	$2R^{13}$	$2R^{23}$	0					0	0	0	1

	R_Y^{01}	R_Y^{02}	R_Y^{03}	R_Y^{12}	R_Y^{13}	R_Y^{23}	$\mathcal{R}_Y^0$	$\mathcal{R}_Y^1$	$\mathcal{R}_Y^2$	$\mathcal{R}_Y^3$	A_Y^0	A_Y^1	A_Y^2	A_Y^3
I_{01}	0	$-2R_Y^{12}$	$-2R_Y^{13}$	$-2R_Y^{02}$	$-2R_Y^{03}$	0	$-\mathcal{R}_Y^1$	$-\mathcal{R}_Y^0$	0	0	$-A_Y^1$	$-A_Y^0$	0	0
I_{02}	$2R_Y^{12}$	0	$-2R_Y^{23}$	$2R_Y^{01}$	0	$-2R_Y^{03}$	$-\mathcal{R}_Y^2$	0	$-\mathcal{R}_Y^0$	0	$-A_Y^2$	0	$-A_Y^0$	0
I_{03}	$2R_Y^{13}$	$2R_Y^{23}$	0	0	$2R_Y^{01}$	$2R_Y^{02}$	$-\mathcal{R}_Y^3$	0	0	$-\mathcal{R}_Y^0$	$-A_Y^3$	0	0	$-A_Y^0$
I_{12}	$2R_Y^{02}$	$2R_Y^{01}$	0	0	$-2R_Y^{23}$	$2R_Y^{13}$	0	$-\mathcal{R}_Y^2$	$\mathcal{R}_Y^1$	0	0	$-A_Y^2$	A_Y^1	0
I_{13}	$-2R_Y^{03}$	0	$2R_Y^{01}$	$2R_Y^{23}$	0	$-2R_Y^{12}$	0	$-\mathcal{R}_Y^3$	0	$\mathcal{R}_Y^1$	0	$-A_Y^3$	0	A_Y^1
I_{23}	0	$-2R_Y^{03}$	$2R_Y^{02}$	$-2R_Y^{13}$	$2R_Y^{12}$	0	0	0	$-\mathcal{R}_Y^3$	$\mathcal{R}_Y^2$	0	0	$-A_Y^3$	A_Y^2

кие выражения не являются трансляционно инвариантными. Значит, кривизна $\mathcal{R}^\alpha$, как и в случае $S[R]$, не входит в действие.

Оставшиеся величины ($R^{\alpha\beta}$, V^α и дуальные к ним) трансляционно инвариантны. Поэтому инварианты из них строятся по обычным правилам с помощью сверток с $O(1,3)$-инвариантными тензорами $\eta_{\alpha\beta}$, $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$. Соответствующее действие имеет форму

$$S[R,\ V]=\int\{a_5R^{\alpha\beta}_{\beta\alpha}+a_6R^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}+N^{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta}_{\alpha'\beta'}R^{\gamma\delta}_{\gamma'\delta'}+\lambda\}\sqrt{g}\,d^4x,$$

где λ — произвольная константа, а $N^{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — произвольный тензор, построенный из $\eta_{\alpha\beta}$, $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$, $R^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}\equiv R^{\alpha\beta}_{mn}V^m_\gamma V^n_\delta$; V^m_γ — компоненты касательного вектора, дуального к V^γ.

Подчеркнем, что, как следует из коммутационных соотношений (1), кривизна $R^{\alpha\beta}$ выражается только через калибровочные поля $A^{\alpha\beta}$ подгруппы $O(1,3)$. Квадратичное по кривизне действие $S[R]+S[R,V]$ в случае ненарушенной калибровочной группы Пуанкаре вообще не содержит полей подгруппы трансляций и соответствует фактически калибровочной теории для группы Лоренца $O(1,3)$.

4. Перейдем к случаю спонтанного нарушения симметрии $\mathcal{P}$ до подгруппы $O(1,3)$, т. е. учтем формы $R^{\alpha\beta}_Y$, $\mathcal{R}^\alpha_Y$, A^α_Y и координаты y^α. Формы $R^{\alpha\beta}_Y=R^{\alpha\beta}$ и $\mathcal{R}^\alpha_Y=\mathcal{R}^\alpha+R^{\alpha\beta}y^\beta$ (см. [1, (5)]) являются трансляционно инвариантными. Как следствие этого, с их помощью удается построить лагранжиан с динамическими калибровочными полями трансляций. Из форм $R^{\alpha\beta}_Y$, $\mathcal{R}^\alpha_Y$ можно построить восемь новых инвариантов, из которых только три квадратичны по компонентам кривизны: $f^Y_1=\mathcal{R}^\alpha_Y\wedge\mathcal{R}^\alpha_Y$, $f^Y_2=\mathcal{R}^\alpha_Y\wedge *\mathcal{R}^\alpha_Y$, $f^Y_3=*\mathcal{R}^\alpha_Y\wedge *\mathcal{R}^\alpha_Y$.

Матрица M, в которую входят координаты y^α, удовлетворяет условию теоремы, определяющей число нечетных инвариантов. Поэтому, учитывая формы V^α, $*V^\alpha$, получаем

$$f^Y_4=\mathcal{R}^\alpha_Y\wedge V^\alpha,\ f^Y_5=\mathcal{R}^\alpha_Y\wedge R^{\alpha\beta}\wedge V^\beta,\ f^Y_6=\mathcal{R}^\alpha_Y\wedge R^{\beta\gamma}\wedge V^\delta\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta},$$

$$f^Y_7=\mathcal{R}^\alpha_Y\wedge R^{\alpha\beta}\wedge R^{\beta\gamma}\wedge V^\gamma$$

и аналогичные инварианты с формами $*V^\alpha$. Квадратичное по кривизне действие, полученное с помощью инвариантов $f_1^Y,\ldots,f_7^Y$, имеет вид

$$S[R,\ \mathcal{R},\ y]=\int\{(\mathcal{R}^\alpha_{mn}+R^{\alpha\beta}_{mn}y^\beta)(\mathcal{R}^\alpha_{pq}+R^{\alpha\gamma}_{pq}y^\gamma)\mathcal{G}^{mnpq}_{7,8}+$$
$$+M^{\gamma\delta\rho\tau}_{\alpha\beta}\mathcal{R}^\alpha_{Y\gamma\delta}\mathcal{R}^\beta_{Y\rho\tau}\sqrt{g}\}\,d^4x, \qquad (3)$$

где $M^{\gamma\delta\rho\tau}_{\alpha\beta}$ — произвольный тензор, построенный из $\eta_{\alpha\beta}$, $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$; $\mathcal{R}^\alpha_{Y\gamma\delta}=\mathcal{R}^\alpha_{Ymn}V^m_\gamma V^n_\delta$.

Формы связности $A^\alpha{}_Y$, $*A^\alpha{}_Y$ приводят к появлению восьми нечетных инвариантов; для получения их вида надо в выражениях $f_4^Y,\ldots,f_7^Y$ заменить формы V^α на $A^\alpha{}_Y$ или $*A^\alpha{}_Y$. Из этих инвариантов, в частности, можно получить физически важный инвариант $A^\alpha{}_Y\wedge *A^\alpha{}_Y$, соответствующий действию

$$S_m[A^\alpha_Y]=\int mA^\alpha_{Yp}A^\alpha_{Yq}g^{pq}\sqrt{g}\,d^4x.$$

Компоненты форм связности $A^\alpha{}_{Yp}$ имеют вид

$$A^\alpha_{Yp}=\partial_p y^\alpha+A^\alpha_p+A^{\alpha\beta}_p y^\beta,$$

где A^α_p, $A^{\alpha\beta}_p$ — поля Янга—Миллса соответственно подгрупп транс-

ляций и Лоренца $O(1,3)$. Поэтому действие $S_m[A^\alpha{}_Y]$ в унитарной калибровке ($y^\alpha=0$) соответствует массовому члену для полей $A_p{}^\alpha$. Действие же (3) содержит кинетические члены для них. Другими словами, построен калибровочно-инвариантный лагранжиан для группы Пуанкаре, который содержит массивные векторные поля, соответствующие подгруппе трансляций.

5. В заключение отметим, что действие

$$S=S[R]+S[R,\ V]+S[R,\ \mathcal{R},\ y]+S_m[A^\alpha{}_Y]$$

включает в себя как частные случаи теорию гравитации с кручением, обычную эйнштейновскую теорию относительности и гравитацию с квадратом кривизны. Переход к ним осуществляется наложением связей, вид которых определяется теоремой о гомоморфизме аффинных и линейных расслоений [4]. Так, если выбрать унитарную калибровку $y^\alpha=0$ (что геометрически соответствует сужению аффинного расслоения на линейное) и положить $A^\alpha{}_m=V^\alpha{}_m$ (что означает выбор среди множества обобщенных аффинных связностей собственно аффинной), то кривизна $\mathcal{R}^\alpha$ становится обычным кручением [4]. Если дополнительно потребовать $\mathcal{R}^\alpha=0$, то в результате получается лагранжиан либо обычной общей теории относительности, либо теории гравитации с квадратом кривизны.

Итак, предложенный метод позволяет построить физически удовлетворительное действие для калибровочной группы Пуанкаре. Обычная трудность, связанная с вырожденностью метрики Киллинга, преодолевается благодаря тому, что метод включает в себя, наравне с теориями с точной симметрией, теории со спонтанным нарушением. Кроме того, в методе не используется какая-либо метрика (в частности, метрика Киллинга).

В большинстве статей, посвященных группе Пуанкаре (см. [2, 3] и ссылки в них), получены лагранжианы, которые не содержат калибровочных полей подгруппы трансляций и вопреки утверждению авторов соответствуют на самом деле теории для подгруппы Лоренца $O(1,3)$. Отметим, что лагранжиан для группы $\mathcal{P}$ в случае нединамических калибровочных полей был получен совершенно другим способом в работе [5]; при этом голдстоуновские поля $y(x)$ вводились не геометрически, а *ad hoc*.

Интересной с физической точки зрения особенностью полученного нами лагранжиана является то, что он приводит к возможности существования массивных векторных частиц, соответствующих калибровочным полям подгруппы трансляций («транслянонов»).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Демичев А. П., Нелипа Н. Ф.//Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3, Физ. Астрон. 1986. 27, № 2. С. 11—17. [2] Ivanenko D., Sardanashvily G.//Phys. Rep. 1983. 94. P. 1—45. [3] Basambrio F. G.//Gen. Rel. Grav. 1980. 12. P. 109—136. [4] Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. М., 1981. Т. 1. [5] McKellar R. J.//J. Math. Phys. 1984. 25. P. 161—166.

Поступила в редакцию
29.12.85