УДК 530.145.1

МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ ФЕЙНМАНОВСКИХ ИНТЕГРАЛОВ ВЕРШИННОГО ТИПА

Э. Э. Боос, А. И. Давыдычев

(НИИЯФ; кафедра квантовой теории и физики высоких энергий)

1. Для получения различных физических результатов в квантовой теории поля как в рамках теории возмущений, так и при использовании непертурбативных методов (в частности, при исследовании инфракрасной области квантовой хромодинамики) очень важно уметь точно вычислять как можно более широкий класс диаграмм фейнмановского типа. Особый интерес представляет вычисление безмассовых фейнмановских интегралов, так как, во-первых, в калибровочных теориях приходится иметь дело с безмассовыми частицами (фотонами, глюонами, духами и т. д.), а во-вторых, например, при изучении процессов при высоких энергиях массами частиц во многих случаях можно пренебречь по сравнению с их импульсами.

При вычислении фейнмановских диаграмм в калибровочных теориях наиболее удобно пользоваться методом размерной регуляризации [1], который, в частности, позволяет сохранить калибровочную инвариантность на всех этапах вычислений. В ряде работ (см., например, [2, 3]) были получены выражения для безмассовых интегралов пропагаторного типа (т. е. зависящих от одного внешнего импульса). В настоящей работе в рамках размерной регуляризации проводится точное вычисление безмассовых однопетлевых фейнмановских интегралов вершинного типа (т. е. зависящих от двух внешних импульсов).

2. Рассмотрим интегралы следующего вида:

$$J(\mu,\ \nu,\ \rho)=\int\frac{d^n r}{(r^2+i0)^{\mu}((p-r)^2+i0)^{\nu}((q-r)^2+i0)^{\rho}}, \tag{1}$$

где $n=4+2\varepsilon$ — размерность пространства-времени, μ, ν и ρ — произвольные параметры, не зависящие от n, а бесконечно малые мнимые добавки в знаменателях определяют правила обхода полюсов в псевдоевклидовом пространстве.

Используя для знаменателей в формуле (1) α-представление [4], интегрируя по импульсу r и делая стандартную замену переменных интегрирования, приходим к следующему выражению:

$$J(\mu,\ \nu,\ \rho)=\pi^{n/2}\frac{i^{1-\mu-\nu-\rho-n/2}}{\Gamma(\mu)\,\Gamma(\nu)\,\Gamma(\rho)}\int\limits_0^{\infty}d\lambda\cdot\lambda^{\mu+\nu+\rho-n/2-1}\times$$

$$\times\int\limits_0^1 d\xi\cdot\xi^{\nu-1}(1-\xi)^{\mu-1}\int\limits_0^1 d\eta\cdot\eta^{\rho-1}(1-\eta)^{\mu+\nu-1}\times$$

$$\times\exp\left[i\lambda(1-\eta)\left(\xi(1-\xi)(1-\eta)p^2+(1-\xi)\eta q^2+\xi\eta k^2\right)\right], \tag{2}$$

где $k=q-p$. С помощью известных формул [5] можно взять интегралы по λ и η; в результате получаем

$$J(\mu,\ \nu,\ \rho)=\pi^{n/2}i^{1-n}\frac{\Gamma(\mu+\nu+\rho-n/2)\,\Gamma(n/2-\rho)}{\Gamma(\mu)\,\Gamma(\nu)\,\Gamma(n/2)}\times$$

$$\times (p^2)^{n/2-\mu-\nu-\rho} \int_0^1 d\xi \cdot \xi^{n/2-\mu-\rho-1} (1-\xi)^{n/2-\nu-\rho-1} \times$$

$$\times {}_2F_1\left(\rho,\ \mu+\nu+\rho-n/2 \,\middle|\, 1-\frac{(1-\xi)\,q^2+\xi k^2}{\xi(1-\xi)\,p^2}\right), \tag{3}$$

где ${}_2F_1$ — гипергеометрическая функция Гаусса. Для того чтобы взять оставшийся интеграл по ξ в формуле (3), воспользуемся формулами аналитического продолжения гипергеометрических функций [6], а затем представим их в виде интеграла Меллина—Бернса:

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} a,\ b \\ c \end{matrix}\,\middle|\, z\right) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}\,\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} ds\cdot(-z)^s\,\frac{\Gamma(-s)\,\Gamma(a+s)\,\Gamma(b+s)}{\Gamma(c+s)},$$

где контур интегрирования отделяет «правые» полюсы Г-функций от «левых» (в дальнейшем все контурные интегралы мы будем понимать именно в этом смысле). Тогда интегралы по ξ можно будет вычислить [5], и, снова применяя формулы аналитического продолжения, мы приходим к выражению, состоящему из четырех слагаемых, первое из которых, например, имеет следующий вид:

$$\pi^{n/2} i^{1-n}\,\frac{\Gamma(n-\mu-\nu-2\rho)\,\Gamma(\mu+\nu+2\rho-n+1)}{\Gamma(\mu)\,\Gamma(\nu)\Gamma(\rho)\,\Gamma(n-\mu-\nu-\rho)} \times$$

$$\times \left\{\Gamma(n/2-\nu-\rho)\,(p^2)^{n/2-\mu-\nu-\rho}\,\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} ds\left(-\frac{q^2}{p^2}\right)^s \times\right.$$

$$\times \frac{\Gamma(-s)\,\Gamma(n/2-\mu-\rho-s)\,\Gamma(\rho+s)\,\Gamma(\mu+\nu+\rho-n/2+s)}{\Gamma(n-\mu-\nu-2\rho-s)\,\Gamma(\mu+\nu+2\rho-n+1+s)} \times$$

$$\left.\times\, {}_2F_1\left(\begin{matrix} -s,\ n/2-\mu-\rho-s \\ \nu+\rho-n/2+1 \end{matrix}\,\middle|\, \frac{k^2}{q^2}\right)\right\}. \tag{4}$$

Используя тот факт, что

$$\frac{1}{\Gamma(c)}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix} a,\ b \\ c \end{matrix}\,\middle|\, z\right)$$

является аналитической функцией своих параметров [6], контурные интегралы в выражении (4) можно представить как суммы вычетов по полюсам подынтегральных Г-функций. Замыкая контур интегрирования вправо, мы получим сумму шести таких рядов. Получившееся таким образом выражение можно существенно упростить, используя известные формулы для Г-функций [6]. В результате этих преобразований получаем сумму четырех рядов:

$$J(\mu,\ \nu,\ \rho) = \pi^{n/2} i^{1-n}\,\frac{\Gamma(n/2-\mu-\rho)\,\Gamma(\mu+\rho-n/2+1)}{\Gamma(\mu)\,\Gamma(\nu)\,\Gamma(\rho)\,\Gamma(n-\mu-\nu-\rho)} \times$$

$$\times \left\{ (p^2)^{-\mu}\,(k^2)^{n/2-\nu-\rho}\,\Gamma(\nu+\rho-n/2)\times\right.$$

$$\times \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}\left(\frac{q^2}{p^2}\right)^j \frac{\Gamma(\mu+j)\,\Gamma(n/2-\nu+j)}{\Gamma(\mu+\rho-n/2+1+j)}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix} -j,\ n/2-\mu-\rho-j \\ n/2-\nu-\rho+1 \end{matrix}\,\middle|\, \frac{k^2}{q^2}\right) -$$

$$- (p^2)^{-\nu} (q^2)^{n/2-\mu-\rho} \Gamma (n/2-\nu-\rho) \times$$

$$\times \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\frac{q^2}{p^2}\right)^j \frac{\Gamma(\nu+j)\Gamma(n/2-\mu+j)}{\Gamma(n/2-\mu-\rho+1+j)} {}_2F_1\left(\begin{matrix}-j,\ \mu+\rho-n/2-j\\ \nu+\rho-n/2+1\end{matrix}\middle|\frac{k^2}{q^2}\right) +$$

$$+ (p^2)^{n/2-\mu-\nu-\rho}\Gamma(n/2-\nu-\rho) \times$$

$$\times \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\frac{q^2}{p^2}\right)^j \frac{\Gamma(\rho+j)\Gamma(\mu+\nu+\rho-n/2+j)}{\Gamma(\mu+\rho-n/2+1+j)} \times$$

$$\times {}_2F_1\left(\begin{matrix}-j,\ n/2-\mu-\rho-j\\ \nu+\rho-n/2+1\end{matrix}\middle|\frac{k^2}{q^2}\right) - (p^2)^{\rho-n/2} (q^2)^{n/2-\mu-\rho} (k^2)^{n/2-\nu-\rho} \times$$

$$\times \Gamma(\nu+\rho-n/2) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\frac{q^2}{p^2}\right)^j \frac{\Gamma(n-\mu-\nu-\rho+j)\Gamma(n/2-\rho+j)}{\Gamma(n/2-\mu-\rho+1+j)} \times$$

$$\times {}_2F_1\left(\begin{matrix}-j,\ \mu+\rho-n/2-j\\ n/2-\nu-\rho+1\end{matrix}\middle|\frac{k^2}{q^2}\right)\Bigg\}. \tag{5}$$

Теперь мы покажем, что ряды в выражении (5) могут быть представлены через гипергеометрические функции двух переменных. Воспользуемся для этой цели следующим равенством:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} \frac{(\alpha)_j (\beta)_j}{(\gamma)_j} {}_2F_1\left(\begin{matrix}-j,\ 1-\gamma-j\\ \delta\end{matrix}\middle| y\right) = F_4(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta;\ x,\ xy), \tag{6}$$

где $(\alpha)_j = \Gamma(\alpha+j)/\Gamma(\alpha)$, а F_4 — гипергеометрическая функция двух переменных [6]:

$$F_4(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta;\ x,\ y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{m+j} (\beta)_{m+j}}{(\gamma)_m (\delta)_j} \frac{x^m}{m!} \frac{y^j}{j!}.$$

Равенство (6) может быть доказано, например, разложением гипергеометрических функций в ряд и сравнением коэффициентов при различных степенях x и y. С использованием формулы (6) выражение (5) может быть записано в более компактном виде:

$$J(\mu,\ \nu,\ \rho) = \pi^{n/2} i^{1-n} \frac{1}{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)\Gamma(\rho)\Gamma(n-\mu-\nu-\rho)} \times$$

$$\times \{(p^2)^{-\mu} (k^2)^{n/2-\nu-\rho} \Gamma(\nu+\rho-n/2)\Gamma(n/2-\mu-\rho)\Gamma(\mu)\Gamma(n/2-\nu) \times$$

$$\times F_4(\mu,\ n/2-\nu,\ \mu+\rho-n/2+1,\ n/2-\nu-\rho+1;\ q^2/p^2,\ k^2/p^2) +$$

$$+ (p^2)^{-\nu} (q^2)^{n/2-\mu-\rho} \Gamma(\mu+\rho-n/2)\Gamma(n/2-\nu-\rho)\Gamma(\nu)\Gamma(n/2-\mu) \times$$

$$\times F_4(\nu,\ n/2-\mu,\ n/2-\mu-\rho+1,\ \nu+\rho-n/2+1;\ q^2/p^2,\ k^2/p^2) +$$

$$+ (p^2)^{n/2-\mu-\nu-\rho} \Gamma(n/2-\nu-\rho)\Gamma(n/2-\mu-\rho)\Gamma(\rho)\Gamma(\mu+\nu+\rho-n/2) \times$$

$$\times F_4(\rho,\ \mu+\nu+\rho-n/2,\ \mu+\rho-n/2+1,\ \nu+\rho-n/2+1;\ q^2/p^2,\ k^2/p^2) +$$

$$+ (p^2)^{\rho-n/2} (q^2)^{n/2-\mu-\rho} (k^2)^{n/2-\nu-\rho} \Gamma(\nu+\rho-n/2) \times$$

$$\times \Gamma(\mu+\rho-n/2)\,\Gamma(n-\mu-\nu-\rho)\,\Gamma(n/2-\rho)\times$$
$$\times F_4(n-\mu-\nu-\rho,\ n/2-\rho,\ n/2-\mu-\rho+1,\ n/2-\nu-\rho+1;$$
$$q^2/p^2,\ k^2/p^2)\}. \tag{7}$$

Отметим, что в предельных случаях, когда μ, ν или ρ равны нулю, формула (7) приводит к известному результату. Заметим также, что с помощью (7) можно получить выражения для интегралов, аналогичных (1), с импульсами r_α, $r_\alpha r_\beta, \ldots$ в числителе по формулам, приведенным в работе [7].

3. Более простые выражения для интегралов можно получить, если рассматривать симметричный сход с нулевой массовой поверхности по двум внешним концам соответствующей фейнмановской диаграммы: $p^2=q^2$ [7]. Тогда можно использовать следующую формулу приведения:

$$F_4(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta;\ 1,\ y)=\frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)}\times$$
$$\times\ {}_4F_3\left(\begin{matrix}\alpha,\ \beta,\ 1+\alpha-\gamma,\ 1+\beta-\gamma\\ \delta,\ (\alpha+\beta-\gamma+2)/2,\ (\alpha+\beta-\gamma+1)/2\end{matrix}\ \middle|\ \frac{y}{4}\right). \tag{8}$$

Ее справедливость также можно показать с помощью разложения в ряд и сравнения коэффициентов. Применяя (8) к выражению (7) в симметричном случае $p^2=q^2$, получаем после некоторых преобразований

$$J(\mu,\ \nu,\ \rho)=\pi^{n/2}i^{1-n}\Big\{(p^2)^{n/2-\mu-\nu-\rho}\times$$
$$\times\frac{\Gamma(n/2-\mu)\,\Gamma(n/2-\nu-\rho)\,\Gamma(\mu+\nu+\rho-n/2)}{\Gamma(\mu)\,\Gamma(\nu+\rho)\,\Gamma(n-\mu-\nu-\rho)}\times \tag{9}$$
$$\times\ {}_4F_3\left(\begin{matrix}\nu,\ \rho,\ n/2-\mu,\ \mu+\nu+\rho-n/2\\ (\nu+\rho)/2,\ (\nu+\rho+1)/2,\ \nu+\rho-n/2+1\end{matrix}\ \middle|\ \frac{k^2}{4p^2}\right)+$$
$$+(p^2)^{-\mu}(k^2)^{n/2-\nu-\rho}\,\frac{\Gamma(n/2-\nu)\,\Gamma(n/2-\rho)\,\Gamma(\nu+\rho-n/2)}{\Gamma(\nu)\,\Gamma(\rho)\,\Gamma(n-\nu-\rho)}\times$$
$$\times\ {}_4F_3\left(\begin{matrix}\mu,\ n/2-\nu,\ n/2-\rho,\ n-\mu-\nu-\rho\\ (n-\nu-\rho)/2,\ (n-\nu-\rho+1)/2,\ n/2-\nu-\rho+1\end{matrix}\ \middle|\ \frac{k^2}{4p^2}\right)\Big\}.$$

Как и следовало ожидать, выражение симметрично по ν и ρ.

Следует отметить, что для конкретных (например, целых) значений параметров μ, ν и ρ выражение (9) сильно упрощается. При этом удобно пользоваться следующей формулой:

$${}_{p+1}F_{q+1}\left(\begin{matrix}a_1,\ \ldots,\ a_p,\ c+m\\ b_1,\ \ldots,\ b_q,\ c\end{matrix}\ \middle|\ z\right)=$$
$$=\sum_{k=0}^{m}C_m^k\,\frac{(a_1)_k\ldots(a_p)_k}{(b_1)_k\ldots(b_q)_k}\,\frac{z^k}{(c)_k}\,{}_pF_q\left(\begin{matrix}a_1+k,\ \ldots,\ a_p+k\\ b_1+k,\ \ldots,\ b_q+k\end{matrix}\ \middle|\ z\right), \tag{10}$$

где C^k_m — биномиальные коэффициенты. Из формулы (10) видно, что при целых μ, ν и ρ гипергеометрические функции ${}_4F_3$ в (9) редуцируются до конечной суммы функций ${}_2F_1$. Разложение полученных выра-

жений при $\varepsilon=(n-4)/2\to 0$, необходимое для различных физических приложений, приводит к еще большему упрощению формул для конкретных интегралов.

4. В заключение отметим, что с помощью развитого в работе метода получены точные выражения (7), (9) для класса безмассовых вершинных интегралов (1) в размерной регуляризации. То обстоятельство, что зависимость от безразмерных комбинаций импульсных переменных выражается через функции гипергеометрического типа, позволяет с помощью формул аналитического продолжения [6] исследовать различные области изменения импульсов.

Полученные результаты представляют несомненный интерес для вычисления радиационных поправок в калибровочных теориях, исследования треугольных аномалий, изучения поведения вершинных функций Грина в инфракрасной области квантовой хромодинамики.

Авторы выражают искреннюю благодарность проф. Б. А. Арбузову за ценные советы и полезные обсуждения, а также д-ру физ.-мат. наук В. И. Саврину за внимание к работе и поддержку.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] 'tHooft G., Veltman M.//Nucl. Phys. 1972. **B44**, N 1. P. 189—213. [2] Chetyrkin K. G., Kataev A. L., Tkachov F. V.//Ibid. 1980. **B174**, N 2—3. P. 345—377. [3] Алексеев А. И., Арбузов Б. А., Байков В. А.//ТМФ. 1982. **52**, № 2. С. 187—198; Препринт ИФВЭ 81-106. Серпухов, 1981. [4] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. М., 1976. [5] Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1971. [6] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М., 1973. Т. 1. [7] Арбузов Б. А., Боос Э. Э., Куренной С. С., Турашвили К. Ш.//Ядерная физика. 1984. **40**, № 3(9). С. 836—845.

Поступила в редакцию
10.01.86
После переработки
09.04.86

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА, АСТРОНОМИЯ. 1987. Т. 28, № 3

УДК 530.12:531.51

НАБЛЮДАЕМЫЕ ПОСТ-НЬЮТОНОВСКИЕ ЭФФЕКТЫ, ВЫЗЫВАЕМЫЕ СТАТИЧЕСКИМИ ЧЕТНОСТЕПЕННЫМИ ФИНСЛЕРОВЫМИ МЕТРИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ

А. К. Арынгазин, Г. С. Асанов

(кафедра теоретической физики)

1. **Формулировка результатов.** В работе [1] были вычислены наблюдаемые финслеровы поправки к эффектам ОТО, относящиеся к поведению орбит планет. В качестве примера финслеровой метрической функции было взято определение $F(x, y)=\sum\limits_{A=1}^{4}[r^A(S_m^A(x)\,y^m)^f]^{1/f}$, где параметр f мог отклоняться от риманова значения $f=2$. Продолжая исследование финслеровых гравитационных пост-ньютоновских эффектов, мы рассматриваем ниже другой интересный класс финслеровых метрических функций (ФМФ), а именно функций вида (6), которые мы назвали статическими четностепенными.

Согласно выводам, сделанным в § 3 работы [1], соприкасающиеся финслеровы объекты S_{abc} и S_{abcd}, представленные разложениями (12),