сыщению множественности. Очень сильно меняется соотношение между множественностями пионов и каонов. Если без плазмы множественности относятся примерно как 10 : 1, то при $\sqrt{S}=10^3$ ГэВ, $x=0,1$ в случае азота множественности примерно равны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Aneshetty R., Koehler P., Mc Lerran L.//Phys. Rev. 1980. **D22**. P. 2793—2804. [2] Cleymans J., Dechantsreiter M., Halzen F.//Z. Phys. C. 1983. 17. P. 341—352. [3] Hwa R. C.//Phys. Rev. 1980. **D22**. P. 759—764. [4] Hwa R. C.//Ibid. 1980. **D22**. P. 1593—1608. [5] Hwa R. C., Zahir M. S.//Ibid. 1981. **D23**. P. 2539—2553. [6] Давиденко Г. В., Николаев Н. Н.//Ядерная физика. 1976. **24**. С. 772—783. [7] Волошин С. А., Никитин Ю. П., Порфиров П. И.//Там же. 1980. **31**. С. 762—771. [8] Carlson C. E., Havens T. J.//Phys. Rev. Lett. 1983. **51**. P. 261—264.

Поступила в редакцию
17.03.86

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1987. Т. 28, № 3

УДК 519.21

РЕДУКЦИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ, ИСКАЖЕННЫХ ТУРБУЛЕНТНОЙ АТМОСФЕРОЙ

Ю. П. Пытьев, А. И. Чуличков, Н. М. Чуличкова

(кафедра математики)

В работе методы редукции [1] применены для преобразования экспериментальных данных, полученных при регистрации оптического излучения, прошедшего через турбулентную атмосферу, к виду, какой они имели бы при измерениях с помощью прибора достаточно высокой разрешающей способности в отсутствие атмосферы. Для построения математической модели эксперимента использовались результаты колмогоровской теории турбулентности [2], причем структурная характеристика показателя преломления турбулентной среды моделировалась случайной функцией с известными параметрами. Рассматривалось влияние статистических характеристик второго порядка параметров среды на возможности коррекции искажений изображения объекта. Исследована структура невязки при решении задачи редукции и сформулированы требования к дополнительной информации об объекте (априорной или полученной из других измерений) для достижения заданного качества редукции.

Работа основана на представлении об оптическом излучении, зарегистрированном после прохождения слоя турбулентной атмосферы, в виде

$$\xi=Af+\nu. \tag{1}$$

Здесь ξ — результат измерения сигнала Af, т. е. интенсивности оптического излучения после прохождения слоя турбулентной атмосферы, представляющего собой искаженный атмосферой A сигнал f; ν — случайная погрешность, характеризующая ошибки при измерении сигнала Af; f — тот сигнал, который регистрировался бы приемником в отсутствие турбулентной атмосферы и шума.

При фотографировании с достаточно большой экспозицией наличие турбулентной атмосферы приводит к размытию изображения объекта. Преобразуем сигнал ξ так, чтобы результат можно было интерпретировать как изображение объекта, полученное на выходе прибора с достаточно высокой разрешающей способностью. Для выбора такого преобразования требуется задать модель измерений, т. е. указать, что известно в соотношении (1) о входящих в него величинах кроме измеренных значений ξ.

Модель измерений. Пусть ξ, Af, ν — векторы гильбертова пространства $\tilde{\mathcal{R}}$, а f — вектор гильбертова пространства $\mathcal{R}$, A — линейный оператор, действующий из $\mathcal{R}$ в $\tilde{\mathcal{R}}$: $A \in (\mathcal{R} \to \tilde{\mathcal{R}})$. Вектор шума ν будем считать случайным элементом с нулевым математическим ожиданием $E\nu=0$ и невырожденным корреляционным оператором Σ. Оператор A моделирует искажающее влияние на изображение f объекта, возникающее вследствие рассеяния излучения на турбулентных вихрях. В предположении слабых флуктуаций для колмогоровской теории турбулентности связь между интенсивностью излучения полностью некогерентного объекта и интенсивностью излучения в плоскости приемника можно записать в виде интеграла свертки. Применение преобразования Фурье позволяет найти передаточную функцию турбулентной атмосферы [3]:

$$A(\omega) = \tau_0(\omega) \exp\left(-c\omega^{5/3} \int_0^L c_n^2(z)(z/L)^{5/3}\,dz\right). \tag{2}$$

Здесь $\tau_0(\omega)$ — передаточная функция, соответствующая дифракции на круглой апертуре в вакууме, L — длина трассы, c — константа, в которую входят длина волны излучения и фокусное расстояние линзы, $c_n^2(z)$ — структурная характеристика показателя преломления, возникающая в теории турбулентности при усреднении по ансамблю. Однако в реальных экспериментах усреднение по ансамблю заменяется усреднением по времени, а так как время экспозиции конечно, то значение $c_n^2(z)$ зависит от положения интервала усреднения на временной оси, т. е. $c_n^2(z)$ — случайная функция.

Согласно модели Хафнагеля [4], можно записать

$$c_n^2(z) = \Phi(z)\, e^{\eta(z)}, \tag{3}$$

где $\Phi(z)$ — известная функция, а $\eta(z)$ — гауссова случайная функция с известным средним и корреляционным оператором, z — высота над уровнем моря, 3 км$\leqslant z \leqslant$24 км. Таким образом, в схеме измерений (1) приходим к необходимости рассмотрения случайного оператора A, задающего связь между интенсивностью объекта f и интенсивностью приходящего от него излучения Af.

Что касается априорной информации об f, будем считать вектор f случайным элементом пространства $\mathcal{R}$ с известными математическими ожиданием $Ef=f_0$ и корреляционным оператором F, задаваемым соотношением $Fx=E(f-f_0)(x, f-f_0)$ для любого $x \in \mathcal{R}$.

Задача редукции. Пусть требуется преобразовать сигнал ξ к виду, какой он имел бы на выходе прибора $U \in (\mathcal{R} \to \mathcal{U})$, с разрешающей способностью $Q(U)$, на вход которого подан сигнал f; $\mathcal{U}$ — гильбертово пространство. Рассмотрим вместо схемы (1) соотношение

$$\xi - A_0 f_0 = A_0(f-f_0) + (A-A_0)f + \nu. \tag{4}$$

Здесь информация о $\tilde{f}=f-f_0$, полученная при измерении, содержится в $\tilde{\xi}=\xi-A_0 f_0$, где $A_0=EA$ — математическое ожидание оператора A, рассчитываемое из формул (2)–(3). Пусть $R \in (\tilde{\mathcal{R}} \to \mathcal{U})$ — линейное преобразование сигнала $\tilde{\xi}$: $R\tilde{\xi}=R(A_0f+(A-A_0)f+\nu)$. Преобразование R найдем, потребовав, чтобы сигнал $R\tilde{\xi}$ был в среднем квадратичном как можно ближе к сигналу $U\tilde{f}$, где U — прибор с достаточно высокой разрешающей способностью, т. е. R и U — решение задачи на минимум

$$\inf\{E\|R\tilde{\xi}-U\tilde{f}\|^2 \mid R\in(\tilde{\mathcal{R}}\to\mathcal{U}),\ U\in(\mathcal{R}\to\mathcal{U}),\ Q(U)\leqslant\varepsilon\}. \tag{5}$$

Здесь $Q(U)$ — разрешающая способность прибора U; чем меньше значение функции $Q(U)$, тем лучше прибор U.

Пусть $E_0, E_1, \ldots, E_M$ — линейно независимые операторы, действующие из $\mathcal{R}$ в $\mathcal{U}$, причем E_0 обладает наивысшей разрешающей способностью, и добавление к нему возмущающих слагаемых вида $\alpha_\mu E_\mu$, $\mu=1, \ldots, M$, $\alpha_\mu\in(-\infty, \infty)$, ухудшает его разрешающую способность тем сильнее, чем больше номер μ [5]. Рассмотрим классы $\mathbf{U}_\mu$, $\mu=1, \ldots, M$, операторов, обладающих гарантированной разрешающей способностью и задаваемых формулой

$$\mathbf{U}_m=\left\{U=E_0+\sum_{\mu=1}^{m}\alpha_\mu E_\mu,\ -\infty<\alpha_\mu<\infty,\ \mu=1, \ldots, m\right\},$$

$$m=0, 1, \ldots, M,$$

причем для $U\in\mathbf{U}_M$ соотношение $Q(U)\leqslant m$ эквивалентно $U\in\mathbf{U}_m$. Тогда для конечномерных пространств $\mathcal{R}$, $\tilde{\mathcal{R}}$ и $\mathcal{U}$ решением задачи (5) являются операторы

$$R_m=FA_0^*S^{-1},\quad U_m=E_0+\sum_{\mu=1}^{m}\alpha_\mu E_\mu, \tag{6}$$

где α_μ, $\mu=1, \ldots, m$, — решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^{m}\alpha_j \operatorname{Tr} E_jTE_\mu^*=-\operatorname{Tr} E_0TE_\mu^*,\quad \mu=1, \ldots, m,$$

где

$$T=F-FA_0^*S^{-1}A_0F,\quad S=A_0FA_0^*+J+\Sigma,\quad J=E(A-A_0)F_0(A-A_0)^*,$$

$$F_0x=Ef(x, f)$$

для любого $x\in\mathcal{R}$, и оператор J может быть рассчитан из формул (2)–(3).

Модельные расчеты для горизонтальных трасс в слоисто-неоднородной атмосфере приведены на рис. 1. В этом случае показатель экспоненты в (3) является гауссовой случайной величиной $\eta\sim N(0, \sigma^2)$; операторы A_0 и J рассчитывались численно на ЭВМ. Значение σ выбиралось равным 2,0, что примерно соответствует априорному среднеквадратичному уклонению структурной характеристики показателя преломления. На рис. 2 показаны результаты редукции данных ξ к виду, какой они имели бы при измерении на приборе U, размывающем изображение точечного источника не более чем на три точки растра. Для моделирования ξ использовалась реализация оператора A, отвечающая значению случайного параметра в (3) $\eta=0{,}2$; из рис. 2 видно, что уточнение данных о характере поведения $c_n{}^2$ может существенно улучшить результат редукции. На рис. 2, *а* приведен результат, когда считалось, что параметр η в (3) имеет среднеквадратичное уклонение $\sigma=2{,}0$, а на рис. 2, *б* — когда $\sigma=0{,}2$ (и в том и в другом случае $\eta=0{,}2$).

Структура невязки $R\tilde{\xi}-U\tilde{f}$. Фиксируем базис $\{e_\mu\}$ пространства $\mathcal{U}$ и рассмотрим вектор $g=(g_1, g_2, \ldots)$, координаты которого представ-

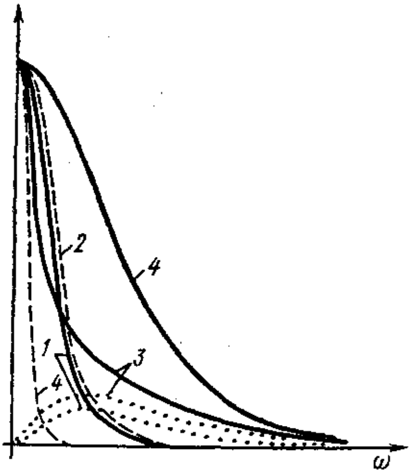

Рис. 1. Математическое ожидание $A_0(\omega)$ передаточной функции турбулентной атмосферы; случайный параметр η имеет среднеквадратичное отклонение $\sigma=0{,}2$ (*1*). Передаточная функция $A(\omega)$, соответствующая реализации $\eta=-0{,}2$ (*2*). Математическое ожидание $A_0(\omega)$ для $\sigma=2{,}0$ (*3*). Передаточные функции $A(\omega)$ для реализации $\eta=-2{,}0$ (сплошная кривая) и $\eta=+2{,}0$ (пунктирная) (*4*). Точками отмечены графики фурье-образов ядра интегрального оператора I, соответствующие графикам *1* и *3*

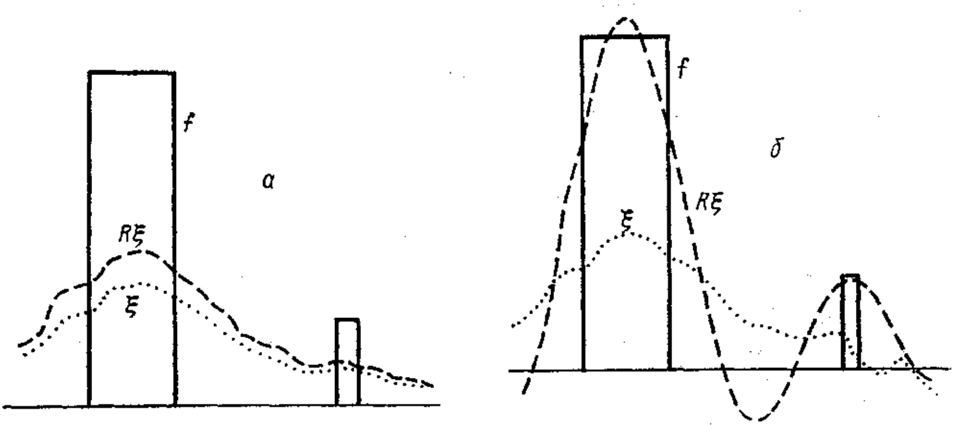

Рис. 2. Модельные расчеты для горизонтальных трасс в слоисто-неоднородной атмосфере: f — входной сигнал, ξ — сигнал, искаженный турбулентной атмосферой. $R\xi$ — результат редукции, $\eta=0{,}2$, $\sigma=2{,}0$ (*а*) и 0,2 (*б*)

ляют собой средние значения квадратов коэффициентов Фурье разности изображений $R\tilde{\xi}$ и $U\tilde{f}$: $g_\mu=E(R\tilde{\xi}-U\tilde{f}, e_\mu)^2$, $\mu=1, 2, \ldots$ Заметим, что $\sum_{\mu=1}^{\infty} g_\mu = E\|R\tilde{\xi}-U\tilde{f}\|^2$, и, таким образом, вектор g определяет структуру невязки $R\tilde{\xi}-U\tilde{f}$. Удобно в качестве векторов e_μ, $\mu=1, 2, \ldots$ выбирать тригонометрические функции, тогда координата g_μ вектора g представляет собой среднее значение квадрата невязки изображений $R\tilde{\xi}$ и $U\tilde{f}$ для μ-й пространственной частоты. Структура невязки может указать, в какой области пространственных частот изображение $R\tilde{\xi}$ в среднем достаточно хорошо приближает изображение $U\bar{f}$, а в какой области точность редукции недостаточна. В частности, если в области пространственных частот, важных для исследователя, для какой-либо частоты μ координата вектора g оказывается неприемлемо большой и ошибка превышает полезный сигнал, то требуются дополнительные меры для того, чтобы уменьшить невязку на данной частоте. Это можно осуществить либо путем уточнения модели атмосферы и уменьшения ошибки $(A-A_0)f$ в (4) за счет уменьшения неопределенности в передаточной функции атмосферы на данной частоте, либо путем уменьшения невязки g_μ за счет уточнения априорных данных об исследуемом изображении на этой же частоте.

Выясним, как влияют априорные неточности в задании оператора атмосферы A и изображения объекта f на структуру невязки. Неточность знаний об изображении f объекта на μ-й частоте характеризует величина $\varphi_\mu = E(f-f_0, h_\mu)^2 = (Fh_\mu, h_\mu)$, так как чем меньше φ_μ, тем ближе в среднем квадратичном должно быть математическое ожидание коэффициента Фурье $f_\mu = (f, h_\mu)$ к его реализации, т. е. тем точнее должна быть информация о векторе f на пространственной частоте с номером μ. (Здесь $\{h_\mu\}$ — ортонормированный базис в $\mathcal{R}$, состоящий из тригонометрических функций.) Неточность в задании оптической передаточной функции атмосферы характеризует оператор J.

Пусть $\{h_\mu\}$ и $\{\tilde{e}_\mu\}$ — ортонормированные базисы пространств $\mathcal{R}$ и $\tilde{\mathcal{R}}$ соответственно, составленные из тригонометрических функций. Будем считать пространства $\mathcal{U}$, $\mathcal{R}$ и $\tilde{\mathcal{R}}$ конечномерными, что эквивалентно тому, что все рассматриваемые изображения имеют финитный спектр. Пусть выполнены соотношения

$$A_0h_\mu = a_\mu e_\mu,\quad Uh_\mu = u_\mu e_\mu,\quad J\tilde{e}_\mu = j_\mu \tilde{e}_\mu,\quad Fh_\mu = \varphi_\mu h_\mu,\quad \Sigma\tilde{e}_\mu = \sigma_\mu \tilde{e}_\mu,$$
$$\mu = 1, 2, \ldots$$

Тогда $g_\mu = u_\mu^2\varphi_\mu - u_\mu^2 a_\mu^2 \varphi_\mu^2/(a_\mu^2\varphi_\mu + j_\mu + \sigma_\mu)$, $\mu = 1, 2, \ldots$

Если исследователь может указать удовлетворяющий его уровень ошибки на μ-й частоте δ_μ, то, разрешая неравенство

$$g_\mu \leqslant \delta_\mu \tag{7}$$

относительно φ_μ, имеем:

$$\varphi_\mu \begin{cases} < \dfrac{\delta_\mu (j_\mu + \sigma_\mu)}{u_\mu^2 (j_\mu + \sigma_\mu) - a_\mu^2 \delta_\mu}, & \text{если } a_\mu^2\delta_\mu < (j_\mu + \sigma_\mu)\, u_\mu^2, \\ \text{нет ограничений}, & \text{если } a_\mu^2\delta_\mu \geqslant u_\mu^2\,(j_\mu + \sigma_\mu). \end{cases} \tag{8}$$

Влияние атмосферы на μ-й частоте тем меньше, чем ближе a_μ к единице; в соответствии с рис. 1 это происходит на малых частотах. Если влияние атмосферы и требуемая точность достаточно малы, так что выполняется неравенство $a_\mu^2\delta_\mu > u_\mu^2(j_\mu+\sigma_\mu)$, то, согласно (8), информация, полученная из измерений, достаточна для восстановления коэффициента Фурье f_μ с заданной точностью независимо от того, большая неопределенность в задании f или нет. Чем больше $u_\mu^2(j_\mu+\sigma_\mu)$ по сравнению с $a_\mu^2\delta_\mu$, тем ближе ограничения на $u_\mu^2\varphi_\mu = E(U(f-f_0), e_\mu)^2$ к δ_μ, т. е. заданная точность δ_μ редукции изображения $R\xi$ к $U\bar{f}$ должна обеспечиваться в большей степени за счет априорных знаний об f. Сингулярные числа оператора U, согласованные с его разрешающей способностью для заданного класса сигналов $f \in \mathcal{F} = \{f \in \mathcal{R}\colon Ef =$

$=f_0,\ E(f-f_0,\ x)(f-f_0)=Fx,\ x\in\mathscr{R}\}$ ослабляют (при $u_\mu^2<1$) или усиливают (при $u_\mu^2\geqslant 1$) ограничения (8).

Разрешим теперь неравенство (7) относительно j_μ:

$$j_\mu\begin{cases} < \dfrac{\delta_\mu a_\mu^2\varphi_\mu+\sigma_\mu(\delta_\mu-u_\mu^2\varphi_\mu)}{u_\mu^2\varphi_\mu-\delta_\mu}, & \text{если } u_\mu^2\varphi_\mu>\delta_\mu, \\ \text{нет ограничений}, & \text{если } u_\mu^2\varphi_\mu\ll\delta_\mu. \end{cases} \tag{9}$$

Вторая строка в (9) означает, что на неопределенность передаточной функции турбулентной атмосферы ограничений нет лишь в том случае, когда априорные данные об Uf на μ-й пространственной частоте обеспечивают заданную точность.

Если для каких-либо μ неравенства (8) и (9) не выполняются, то без уточнения модели измерений невозможно достигнуть заданной точности редукции. Неравенства (8)—(9) позволяют до измерений указать, какая информация об объекте нам нужна, или какие ошибки, обусловленные неточностью модели атмосферы, нас устраивают. Предложенный подход, таким образом, позволяет установить до опыта, как влияют на результат редукции ошибки в операторе A, определяемые наличием слагаемого $(A-A_0)f$ в соотношении (4); какой должна быть априорная информация об f для того, чтобы можно было эффективно уменьшить влияние ошибки $(A-A_0)f$ на результат редукции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Пытьев Ю. П.//Матем. сб. 1982. **118(160)**, № 1(5). С. 19—49. [2] Татарский В. И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. М., 1967. [3] Исимару А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. М., 1981. Т. 2. [4] Клиффорд С. Ф.//Распространение лазерного пучка в атмосфере/ Под ред. Д. Стробена. М., 1981. С. 18—60. [5] Пытьев Ю. П.//Матем. сб. 1983. **120(162)**, № 2. С. 240—272.

Поступила в редакцию
14.02.86

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1987. Т. 28, № 3

УДК 519.95

ЗАДАЧА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТА С ПОЛУПРОВОДНИКОВЫМИ ДЕТЕКТОРАМИ ЯДЕРНЫХ ИЗЛУЧЕНИЙ

И. В. Митин, Т. Д. Шодмонкулов

(кафедра общей физики для физического факультета)

1. При экспериментальных исследованиях зачастую оказывается невозможным провести непосредственные измерения той или иной величины, что может быть связано, во-первых, с несовершенством самого измерительного прибора и, во-вторых, с наличием в эксперименте шума, природа которого может быть самой различной. Будем рассматривать эксперименты, проводимые по следующей схеме:

$$\xi=Af+\nu, \tag{1}$$

где f — истинный сигнал, который измеряется, A — характеристика линейного измерительного прибора, ν — шум в эксперименте, ξ — результат измерения сигнала f на приборе A при уровне шума ν.