$=f_0,\ E(f-f_0,\ x)(f-f_0)=Fx,\ x\in\mathcal{R}\}$ ослабляют (при $u_\mu^2<1$) или усиливают (при $u_\mu^2\geqslant 1$) ограничения (8).

Разрешим теперь неравенство (7) относительно j_μ:

$$j_\mu\begin{cases} < \dfrac{\delta_\mu a_\mu^2\varphi_\mu+\sigma_\mu(\delta_\mu-u_\mu^2\varphi_\mu)}{u_\mu^2\varphi_\mu-\delta_\mu}, & \text{если } u_\mu^2\varphi_\mu>\delta_\mu, \\ \text{нет ограничений}, & \text{если } u_\mu^2\varphi_\mu\leqslant\delta_\mu. \end{cases} \tag{9}$$

Вторая строка в (9) означает, что на неопределенность передаточной функции турбулентной атмосферы ограничений нет лишь в том случае, когда априорные данные об Uf на μ-й пространственной частоте обеспечивают заданную точность.

Если для каких-либо μ неравенства (8) и (9) не выполняются, то без уточнения модели измерений невозможно достигнуть заданной точности редукции. Неравенства (8)—(9) позволяют до измерений указать, какая информация об объекте нам нужна, или какие ошибки, обусловленные неточностью модели атмосферы, нас устраивают. Предложенный подход, таким образом, позволяет установить до опыта, как влияют на результат редукции ошибки в операторе A, определяемые наличием слагаемого $(A-A_0)f$ в соотношении (4); какой должна быть априорная информация об f для того, чтобы можно было эффективно уменьшить влияние ошибки $(A-A_0)f$ на результат редукции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Пытьев Ю. П.//Матем. сб. 1982. **118(160)**, № 1(5). С. 19—49. [2] Татарский В. И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. М., 1967. [3] Исимару А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. М., 1981. Т. 2. [4] Клиффорд С. Ф. // Распространение лазерного пучка в атмосфере / Под ред. Д. Стробена. М., 1981. С. 18—60. [5] Пытьев Ю. П. // Матем. сб. 1983. **120(162)**, № 2. С. 240—272.

Поступила в редакцию
14.02.86

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1987. Т. 28, № 3

УДК 519.95

ЗАДАЧА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТА С ПОЛУПРОВОДНИКОВЫМИ ДЕТЕКТОРАМИ ЯДЕРНЫХ ИЗЛУЧЕНИЙ

И. В. Митин, Т. Д. Шодмонкулов

(кафедра общей физики для физического факультета)

1. При экспериментальных исследованиях зачастую оказывается невозможным провести непосредственные измерения той или иной величины, что может быть связано, во-первых, с несовершенством самого измерительного прибора и, во-вторых, с наличием в эксперименте шума, природа которого может быть самой различной. Будем рассматривать эксперименты, проводимые по следующей схеме:

$$\xi=Af+\nu, \tag{1}$$

где f — истинный сигнал, который измеряется, A — характеристика линейного измерительного прибора, ν — шум в эксперименте, ξ — результат измерения сигнала f на приборе A при уровне шума ν.

Вполне понятно, что экспериментатор хотел бы, чтобы измерение величины ξ давало как можно более точную информацию об f. Так как $\xi=f$, только если $A=I$, где I — идеальный прибор, и $\nu=0$, то ясно, что экспериментатор всегда стремится к созданию и использованию в измерениях приборов, максимально близких к идеальному, а также к созданию и использованию различных систем шумоподавления. Однако нередко создание таких систем и приборов является чрезвычайно трудным делом, требующим больших материальных затрат, а иногда и просто невозможным на настоящем этапе развития науки и техники. Поэтому заманчивым представляется путь получения информации об f на основе измерений по схеме (1) с помощью математических методов решения уравнения (1). Так как шум ν в эксперименте есть случайная величина, и мы можем указать (да и то не всегда) лишь некоторые статистические свойства шума, например распределение, различные моменты и т. п., то задача нахождения f из уравнения (1) относится к классу некорректных обратных задач, решение которых связано с целым рядом трудностей (см. подробнее в [1]). Разработано немало методов решения таких задач. В настоящей работе мы рассмотрим метод редукции измерений по схеме (1) к желаемому прибору U, предложенный в работе [2]. Этот метод будет использован для нахождения спектра α-излучения с помощью полупроводниковых детекторов (ППД).

2. Пусть проведены измерения ξ по схеме (1), причем пусть известны линейная аппаратная функция прибора A и корреляционный оператор шума* Σ. Суть метода редукции заключается в нахождении такого линейного преобразования R сигнала ξ, когда $R\xi$ может быть интерпретирован как результат измерения f на другом приборе U с характеристикой, лучшей, чем у прибора A, т. е.

$$R\xi=Uf+(RA-U)f+R\nu \tag{2}$$

или

$$R\xi-Uf=(RA-U)f+R\nu. \tag{2a}$$

Понятно, что $R\xi\approx Uf$ с точностью до правой части уравнения (2а), зависящей от f, но так как значение f неизвестно, то в работе [2] рассмотрена задача на нахождение минимума по норме $\|RA-U\|_2^2$ при ограничении на уровень шума $\|R\nu\|^2<\varepsilon$, названная задачей редукции в рамках модели $[A, \Sigma]$, и приводится ее решение.

Однако данное решение, во-первых, не позволяет найти ошибку редукции, т. е. $E\|R\xi-Uf\|^2$, и, во-вторых, существенно зависит от выбранного уровня ограничения шума ε, поэтому практически всегда приходится привлекать дополнительные соображения, связанные зачастую с интуицией экспериментатора. Обычно исследователь всегда имеет представление о характере измеряемой величины и может указать хотя бы приблизительно ее значения (возможно, лишь на отдельных участках) и допустимые отклонения от этого значения. Рассмотрим ситуацию, когда исследователь указывает среднее значение измеряемой величины f_0 и ее корреляционную функцию F (вопрос о правомерности включения этой информации в математическую обработку будет обсужден ниже). Тем самым мы имеем дело с моделью $[A, F, f_0, \Sigma]$, которая рассматривалась в [2]. Напомним вкратце постановку задачи редукции для этой модели и ее решение (будем рассматривать редукцию к идеальному прибору $U=I$).

* Все обозначения данной работы соответствуют принятым в [2].

Перепишем уравнение (1) в виде

$$\xi_н = Af_н + \nu,$$

где $\xi_н = \xi - Af_0$, $f_н = f - f_0$. Подействуем оператором редукции R на это уравнение:

$$R\xi_н = f_н + (RA - I) f_н + R\nu.$$

Оператор R находится как решение вариационной задачи на минимум функционала полной погрешности $E\|R\xi_н - f_н\|^2$ и имеет вид

$$R = FA^*(AFA^* + \Sigma)^{-1}. \tag{3}$$

Ошибка редукции

$$h = E\|R\xi_н - f_н\|^2 = \mathrm{Tr}\,(F - FA^*(AFA^* + \Sigma)^{-1}AF) \tag{4}$$

в этом случае минимальна. Найденная оценка для f имеет вид

$$\hat{f} = f_0 + R\xi_н,$$

при этом вектор $\hat{f}$ интерпретируется как истинный сигнал, измеренный с минимально возможной ошибкой h.

Нетрудно заметить, что оператор редукции и ошибка редукции зависят только от A, F и Σ и не зависят от ξ и f_0. Иными словами, экспериментатор может высказать любое предположение о среднем значении сигнала, даже заведомо ложное, а оператор редукции R при этом не изменится. Естественно, это ни в коей мере не может удовлетворить экспериментатора, необходимо введение еще каких-либо характеристик решения задачи редукции, которые позволяли бы устанавливать соответствие между данными эксперимента ξ и априорными данными f_0 и F, указанными экспериментатором. Поэтому в работе [3] было введено понятие надежности решения задачи. Основанием для введения этой характеристики модели является вытекающий из решения задачи редукции в модели $[A, F, f_0, \Sigma]$ факт, что если величины f и ν независимы и контролируются нормальным распределением $\mathcal{N}(f_0, F)$ и $\mathcal{N}(0, \Sigma)$, то величина

$$\|(\Sigma_*^{1/2})^- (\xi - A\hat{f})\|^2 \tag{5}$$

контролируется распределением Пирсона с $m = \dim \mathcal{R}(\Sigma)$, где

$$\hat{f} = f_0 + FA^*(AFA^* + \Sigma)^{-1}(\xi - Af_0) \text{ и } \Sigma_* = \Sigma(AFA^* + \Sigma)^{-1}\Sigma.$$

Поэтому, выдвигая гипотезу о нормальном распределении $\mathcal{N}(f_0, F)$, мы должны сделать вывод относительно соответствия гипотетического распределения сигнала f с данными эксперимента, для чего можно воспользоваться критерием согласия χ^2. Под надежностью результата редукции будем понимать минимальную вероятность ошибочно отвергнуть гипотезу в случае, когда она верна.

Теперь, решая задачу редукции, экспериментатор имеет две характеристики этого решения: его надежность и ошибку редукции, что открывает новые возможности при проведении математической обработки результатов. Можно указать практически любую априорную информацию о сигнале и, решив задачу редукции, получить минимально возможную ошибку, при этом будет вычислена и надежность полученного результата. Теперь экспериментатору надо будет решить, что для него важнее — минимальная ошибка или высокая надежность результата. Можно и несколько видоизменить постановку задачи редукции,

например, если априорная информация содержит один или несколько варьируемых параметров, получить максимально надежный результат при ограничении сверху на ошибку редукции или, наоборот, минимизировать ошибку при выборе определенного уровня надежности результата. Таким образом, у экспериментатора появляется возможность работать в диалоге с ЭВМ, высказывать различные предположения о характере поведения измеряемых величин и при этом получать достаточно объективную информацию о решении задачи.

3. Рассмотрим конкретный случай применения данной методики для обработки эксперимента по регистрации α-излучения с помощью полупроводниковых детекторов (ППД). В данном случае мы имели дело с кремниевым ППД с вкраплениями лития и источником α-частиц ^{238}Pu, который дает две близкие линии с энергиями 5,456 и 5,499 МэВ. Остановимся вкратце на физических принципах работы ППД.

Под действием α-излучения в ППД происходит ионизация пространства полупроводника, а затем образовавшиеся заряды под действием приложенного напряжения собираются на обкладках, причем в соответствии с теоретическими моделями ППД величина этого заряда должна быть пропорциональна энергии α-частиц. Однако из-за наличия различных механизмов потерь заряда на одиночных центрах захвата носителей заряда, локальных неоднородностях и т. п., а также ряда других причин (см. подробнее [4]) функция отклика ППД на сигнал определенной энергии не является идеальной. Форму функции отклика принято считать близкой к гауссовой, однако для каждого конкретного ППД она может иметь существенные отличия, причем, вообще говоря, зависящие от энергии падающего излучения. Поэтому для нахождения функции отклика ППД необходимо проводить серию тестовых измерений.

С выхода ППД сигнал поступает на электронную часть схемы регистрации, состоящую из предусилителя, усилителя и многоканального анализатора импульсов, которые также вносят определенные искажения в форму сигнала. В целом процесс измерения спектра излучения описывается уравнением типа уравнения свертки

$$N(E_1)=\int_E A(E, E_1)\cdot f(E)\, dE+\nu, \tag{6}$$

где E — величина энергии α-излучения, E_1 — величина энергии, регистрируемой прибором, $f(E)$ — спектр α-излучения источника, $N(E_1)$ — спектр, регистрируемый прибором, $A(E, E_1)$ — аппаратная функция всей системы регистрации, складывающаяся из функций отклика ППД и электронной части схемы, ν — шум в системе регистрации.

В данном конкретном эксперименте рассматривался достаточно узкий диапазон энергий α-излучения, в котором ядро интегрального уравнения (6) может считаться разностным. Поэтому мы можем перейти к фурье-образу этого уравнения, что позволяет в значительной мере упростить обработку эксперимента.

4. Запишем фурье-образ уравнения (6) в виде

$$\xi=Af+\nu, \tag{7}$$

где ξ, f и ν — соответственно фурье-образы экспериментального сигнала, искомого сигнала и шума измерений, A — матрица аппаратной функции, которая в фурье-представлении является диагональной. Как уже отмечалось, форма аппаратной функции для каждого ППД различна, поэтому решение уравнения (7) проводилось в рамках модели

со случайным оператором $[A_0, J, F, f_0, \Sigma]$, где $A_0=E(A)$, $J=E((A-A_0)F(A-A_9)^*)$.

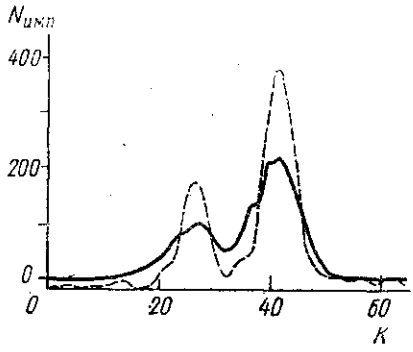
Исходя из теоретических моделей ППД мы можем указать априорную информацию об A_0 и J, а затем уточнить эти операторы, проведя тестовые измерения всей системы регистрации, подавая на вход прибора сигналы известной формы. Пусть схема тестирования имеет вид

$$\psi=A\varphi+\mu,$$

где φ — известный тестовый сигнал, ψ — результат измерения тестового сигнала на неизвестном приборе A, μ — шум эксперимента.

Так как мы работаем в фурье-представлении, где матрица A диагональна, то для ее уточнения можно воспользоваться редукционной постановкой задачи в рамках модели $[\tilde{A}, \tilde{F}, \tilde{f}_0, \tilde{\Sigma}]$, где роль $\tilde{A}$ выполняет столбец тестового сигнала φ, а роль $\tilde{f}_0$ — диагональные члены априорной информации о матрице A_0. После обработки тестовых измерений мы получаем новую оценку аппаратной функции $A_{0\psi}$ и ошибки ее определения J_ψ.

5. С учетом необходимости тестовых измерений эксперимент с ^{238}Pu был проведен дважды в одинаковых условиях, но с различным временем накопления, различающимся на полтора порядка. Эксперимент с большим временем накопления был проведен с целью уточнения аппаратной функции, которая априорно предполагалась гауссовой, а уточненные данные в свою очередь использовались при решении задачи редукции для эксперимента с меньшим временем накопления. В этом случае пики излучения имеют не столь ярко выраженный характер, как в эксперименте с большой статистикой, поэтому заранее, без проведения математической обработки, трудно указать их истинное местоположение. Априорная информация задавалась в виде двух пиков фиксированной полуширины и фиксированного соотношения интенсивностей (из теоретической модели α-излучения источника), а координаты этих пиков являлись двумя параметрами задачи, т. е. $f_0=f_0(\alpha_1, \alpha_2)$, корреляционный же оператор F от этих параметров не зависел. Так как ошибка редукции не зависит от f_0 и тем самым от α_1 и α_2, то уточнение параметров целиком определяется надежностью полученных результатов, иными словами, варьируя значения параметров, можно найти α_{10} и α_{20}, соответствующие максимуму надежности.



Результаты эксперимента (сплошная линия) и математической обработки (штриховая). По оси абсцисс отложен номер канала многоканального анализатора, по оси ординат — число импульсов в канале

На рисунке приведены результаты эксперимента и математической обработки для значений параметров α_{10} и α_{20}, соответствующих максимальной надежности результата (рассчитанная по формуле (5) величина при числе степеней свободы $m=61$ равна 40,3), при этом ошибка редукции (4) уменьшилась с $5{,}76\cdot10^4$ до $2{,}76\cdot10^4$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М., 1979. [2] Пытьев Ю. П.//Матем. сб. 1983. **120**, № 2. С. 240—272. [3] Пытьев Ю. П.//Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3, Физ. Астрон. 1986. 27, № 5. С. 3—7. [4] Дирнли Дж., Нортроп Д. Полупроводниковые счетчики ядерных излучений. М., 1966.

Поступила в редакцию
13.03.86

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1987. Т. 28, № 3

УДК 510.6:53.081

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ПАССИВНЫХ ДВУХПОЛЮСНИКОВ

Б. И. Шестаков

(кафедра общей физики для физического факультета)

§ 1. *Двухполюсник* (ДП), не содержащий источников эдс и токов, называется *пассивным*. Пассивный ДП в общем случае имеет *сопротивление* R, *емкость* C и *индуктивность* (коэффициент самоиндукции) L. ДП, рассматриваемый абстрактно, как обладающий лишь одним из этих параметров, будем называть *элементарным*, ибо именно такие ДП являются *элементами принципиальных схем электрических цепей* (ЭЦ).

Элементарные ДП условимся обозначать символами $\langle R\rangle$, $\langle C\rangle$ и $\langle L\rangle$ и называть соответственно: *идеальным резистором*, *идеальным конденсатором* и *идеальным самоиндуктором* (*self-inductor*), ибо эти ДП являются идеализацией соответствующих реальных ДП: резистора, конденсатора и катушки самоиндукции.

Пассивный ДП называется *линейным*, если его параметры не зависят от силы тока, протекающего через него, и от разности потенциалов на его полюсах. В теории *линейных* ЭЦ переменного тока пассивные ДП обычно характеризуют их комплексными параметрами — *импедансами* Z_k или *адмитансами* $Y_k=Z_k^{-1}$, $k=1, 2, \ldots$, и потому ДП в этих ЭЦ можно обозначать символами $\langle Z_k\rangle$ или $\langle Y_k\rangle$.

Вообще, всякий пассивный ДП, обозначенный символом $\langle P\rangle$, можно обозначить и символом $\langle P^{-1}\rangle$, где P^{-1} — параметр, обратный параметру P. Поэтому формула

$$\langle P\rangle=\langle P^{-1}\rangle, \qquad (a_0)$$

очевидно, верна для всякого $P=R$, C, L, Z, хотя равенство $P=P^{-1}$ бессмысленно из-за неравенства размерностей P и P^{-1} при указанных выше значениях P. Формула (a_0) — частный случай формулы

$$\langle P\rangle=\langle Q\rangle, \qquad (a)$$

ибо при $Q=P^{-1}$ она совпадает с формулой (a_0).

Чтобы формулу (a) можно было рассматривать как отношение *эквивалентности* ДП $\langle P\rangle$ и $\langle Q\rangle$, мы должны определить отношение (a) так, чтобы оно было *рефлексивно*, *симметрично* и *транзитивно*. Решить эту проблему при $Q=P^{-1}$, где $P=R$, C, L, Z, используя лишь операции *классической* (двузначной) логики B_2, очевидно, невозможно, ибо она вообще не имеет дела с бессмысленными высказываниями. Для решения этой проблемы мы должны обратиться к трехзначной логике B_3 — логике Бочвара [1, 2], оперирующей не только с истинными и ложными, но также и с бессмысленными высказываниями.