УДК 510.6:53.081

О ПРИМЕНЕНИИ ТРЕХЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ В ТЕОРИИ РАЗМЕРНОСТЕЙ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

В. И. Шестаков

(кафедра общей физики для физического факультета)

§ 1. *Исчисление высказываний* (ИВ) B_3 (логики Бочвара [1, 2]) применялось для анализа отношений между *физическими величинами* (ФВ). Здесь рассмотрим вопрос о применении ИВ для вывода основных формул теории размерностей ФВ.

Полагая, что читатель имеет возможность ознакомиться с содержащимися в [3] определениями операций ИВ, мы не приводим их здесь, за исключением операции $A \supset\subset B$, в определении которой (табл. 3 в [3]) допущена опечатка — вместо знака $\cap$ напечатан знак $\cup$. Правильное определение этой операции:

$$A \supset\subset B \rightleftharpoons (A \supset B) \cap (B \supset A),$$

где $\cap$ и $\supset$ — знаки *конъюнкции* и *импликации* (табл. 3 в [3]) высказываний A и B. Эту операцию будем называть *биимпликацией* или *эквиваленцией*.

Дополнительно к операциям ИВ, символы которых определены [3], нам потребуются еще две операции ИВ, определяемые следующими *равенствами по определению*: $\overline{\downarrow} A \rightleftharpoons \sim \neg A$, $\underline{\downarrow} A \rightleftharpoons \sim \downarrow A$, где $\sim$, $\neg$, $\downarrow$ — знаки операций ИВ, определенных в [3].

Следуя [1, с. 287], будем называть высказывание *предложением*, если и только если *оно имеет смысл*. В силу этого условия символ $\underline{\downarrow} A$, означающий высказывание «A имеет смысл», означает также и высказывание «A — предложение».

Легко проверить построением таблиц *истинностных значений*, подобных табл. 2 в [3], что формулы

$$\underline{\downarrow} A \equiv \vdash A \cup \neg A \equiv \vdash (A \cup \sim A) \equiv \vdash (A \supset A) \equiv \underline{\downarrow} \sim A, \tag{1}$$

$$\downarrow A \equiv \overline{A} \cap \neg A \equiv \overline{A \cup \sim A} \equiv \overline{A \supset A} \equiv \downarrow \sim A \tag{1'}$$

верны при любых истинностных значениях высказывания A.

Из этих формул следуют формулы

$$(2)\quad \underline{\downarrow} A \equiv \underline{\downarrow} \sim A, \qquad \downarrow A \equiv \downarrow \sim A, \tag{2'}$$

утверждающие, что *высказывания A и $\sim A$ («не-A») либо оба имеют смысл, либо оба бессмысленны.*

Формула (1) содержит еще три высказывания: «A верно или A ложно», «верно A или не-A» и «верно, что если A, то A», эквивалентные высказыванию $\underline{\downarrow} A$ — «A имеет смысл» («A — предложение»).

§ 2. Полагая

$$A \rightleftharpoons (V = W), \quad B \rightleftharpoons ([V] = [W]), \tag{D1}$$

где $[V]$ и $[W]$ — размерности ФВ V и W, можно формулы (a_0), (a_0'),

(a_1), (a_1') статьи [3] представить соответственно следующими формулами:

$$(A0) \quad \bar{B} \supset \downarrow A, \qquad \bar{\downarrow} A \supset \vdash B, \qquad (A0')$$

$$(A1) \quad \bar{B} \supset \downarrow \sim A, \qquad \bar{\downarrow} \sim A \supset \vdash B. \qquad (A1')$$

Все эти формулы эквивалентны друг другу [3] и потому, приняв одну из них в качестве *постулата теории размерностей* ФВ, мы должны считать другие из них эквивалентными формами этого постулата.

Формулы $(A0)$ и $(A1)$ мы использовали [3] для анализа отношений между ФВ. Здесь же мы применим формулы $(A0')$ и $(A1')$ для вывода основных формул теории размерностей ФВ.

Из $(A0')$ и (1) следуют импликации

$$\vdash A \cup \neg A \supset \vdash B, \qquad (3)$$

$$\vdash (A \cup \sim A) \supset \vdash B, \qquad (4)$$

эквивалентные в силу $(D1)$ и определения

$$(V \neq W) \rightleftharpoons \sim (V = W) \qquad (D2)$$

следующим формулам:

$$\vdash (V = W) \cup \neg (V = W) \supset \vdash ([V] = [W]), \qquad (5)$$

$$\vdash (V = W) \cup \vdash (V \neq W) \supset \vdash ([V] = [W]), \qquad (6)$$

$$\vdash ((V = W) \cup (V \neq W)) \supset \vdash ([V] = [W]). \qquad (7)$$

Формула (5) утверждает, что *для истинности равенства* $[V]=[W]$ *размерностей* $[V]$ *и* $[W]$ *ФВ* V *и* W *достаточно, чтобы равенство* $V=W$ *этих ФВ было верно или ложно*, а формула (7) — что *истинность классического закона исключенного третьего*

$$(V = W) \cup (V \neq W)$$

является достаточным условием равенства $[V]=[W]$ *размерностей* $[V]$ *и* $[W]$ *ФВ* V *и* W.

Полагая в формуле (7) $W=\alpha V$, где α — *любое число*, а V — *любая ФВ*, получим импликацию

$$\vdash ((V = \alpha V) \cup (V \neq \alpha V)) \supset \vdash ([V] = [\alpha V]), \qquad (8)$$

антецедент (посылка) которой верен как в случае $\alpha=1$, так и в случае $\alpha \neq 1$, т. е. *верен всегда*. В силу истинности антецедента из импликации (8) следует формула

$$\vdash ([V] = [\alpha V]), \qquad (9)$$

выражающая известный в теории размерностей ФВ тезис: «*размерности ФВ* V *и* αV, *отличающихся лишь числовым множителем* α, *одинаковы*».

§ 3. Всякая действительная или комплексная ФВ V представима формулой [4, (2)]

$$V = „V“ V_e, \qquad (10)$$

где „V“ — *числовое значение*, а V_e — *единица ФВ* V в какой-либо системе единиц ФВ.

Из формул (9) и (10) следует формула

$$\vdash ([V]=[V_e]), \tag{11}$$

утверждающая, что *размерность любой действительной или комплексной ФВ V равна размерности ее единицы V_e* в той системе единиц ФВ, в которой измерена ФВ V.

ФВ V называется *безразмерной*, если $V_e=1$. Для безразмерной ФВ V формула (11) принимает следующий вид:

$$\vdash ([V]=[1]). \tag{11а}$$

При „V"$=\alpha$, где α — некоторое число, получаем отсюда формулу

$$\vdash ([\alpha]=[1]), \tag{11б}$$

утверждающую, что *размерность* $[\alpha]$ *любого числа α равна размерности* $[1]$ *числа* 1.

ФВ U называется *небезразмерной* или *размерной*, если и только если она удовлетворяет формуле

$$\overline{[U]=[1]} \tag{12}$$

или эквивалентной ей (в силу (11)) формуле

$$\overline{[U]=[\alpha]}, \tag{13}$$

где α — *любое число.*

Отсюда в силу постулата ($A0'$) следует формула

$$\downarrow (U=\alpha), \tag{14}$$

утверждающая, что *равенство $U=\alpha$, где U — любая размерная ФВ, а α — любое число, бессмысленно.*

§ 4. Пусть

$$W=UV. \tag{а}$$

Тогда по формуле (10) получим равенства

$$„W"W_e=„U"U_e\cdot„V"V_e=„U"„V"\cdot U_eV_e,$$

из которых следуют равенства „W"$=$„U"„V", $W_e=U_eV_e$, а из них, с учетом формулы (11), следует формула

$$[UV]=[U][V], \tag{15}$$

утверждающая: «*размерность произведения ФВ равна произведению размерностей этих ФВ*».

Из ассоциативности и коммутативности умножения ФВ следует, по формуле (15), ассоциативность и коммутативность умножения размерностей ФВ.

Единицей операции умножения размерностей ФВ является размерность $[\alpha]$ *любого числа* α. Действительно, в силу формул (15) и (9) справедливы равенства $[\alpha][V]=[\alpha V]=[V]=[V\alpha]=[V][\alpha]$, из которых следует, что $[\alpha]$ является левой и правой единицей операции умножения размерностей ФВ:

$$[\alpha][V]=[V]=[V][\alpha]. \tag{16}$$

При $\alpha=1$ получаем отсюда равенства

$$[1][V]=[V]=[V][1], \tag{16а}$$

позволяющие считать [1] единицей операции умножения размерностей ФВ.

Если в формуле (15) ФВ U заменим ФВ V^{-1}, то получим равенства $[V^{-1}][V]=[V^{-1}V]=[1]$, из которых следует, что можно принять определение

$$[V]^{-1} \rightleftharpoons [V^{-1}] \qquad (D3)$$

для любой ФВ V, для которой определена операция V^{-1}.

Деление размерностей ФВ определим формулой

$$[W]/[V] \rightleftharpoons [W][V^{-1}]. \qquad (D4)$$

При $W=V$ из этого определения следуют равенства

$$[V]/[V]=[V][V]^{-1}=[V][V^{-1}]=[VV^{-1}]=[V^0]=[1],$$

из которых следует формула

$$[V]/[V]=[1], \qquad (17)$$

аналогичная формуле $\alpha/\alpha=1$, верной для любого числа $\alpha\neq 0$.

Нулевую степень $[V]^0$ размерности $[V]$ любой ФВ V определим формулой

$$[V]^0 \rightleftharpoons [1], \qquad (D5)$$

аналогичной формуле $\alpha^0 \rightleftharpoons 1$, которой определяется нулевая степень любого числа α.

Степень $[V]^n$ размерности $[V]$ любой ФВ V для любого натурального числа $n\geqslant 1$ определим формулами

$$[V]^1 \rightleftharpoons [V], \quad [V]^{n+1} \rightleftharpoons [V]^n[V]^1. \qquad (D6)$$

Степень $[V]^{-n}$, где n — любое натуральное число ($n\geqslant 1$), определим формулой

$$[V]^{-n} \rightleftharpoons [V^{-1}]^n. \qquad (D7)$$

Если $[V]\neq[1]$, то для *любого целого числа* $m\neq 0$ очевидно, что

$$[V]^m\neq[1]. \qquad (18)$$

Итак, исходя из постулата ($A0'$) и используя определения ($D1$)—($D7$), приходим к выводу: «множество размерностей комплексных ФВ является абелевой группой относительно операции умножения размерностей ФВ», т. е. к результату, следующему из первых пяти постулатов Флейшманна [5, 6], [7, с. 17].

§ 5. Рассмотрим теперь вопрос о размерности суммы ФВ. Из определения операции сложения ФВ [4, ($D6$)]

$$\gamma_1 V_e+\gamma_2 V_e \rightleftharpoons (\gamma_1+\gamma_2) V_e,$$

где γ_1 и γ_2 — любые числа (в общем случае комплексные), и формулы (11) получаем равенства

$$[V_1]=[\gamma_1 V_e]=[V_e], \quad [V_2]=[\gamma_2 V_e]=[V_e], \quad [V_1+V_2]=[(\gamma_1+\gamma_2) V_e]=[V_e],$$

из которых следует формула

$$\vdash ([V_1+V_2]=[V_1]=[V_2]), \qquad (19)$$

которую легко обобщить на любое число n слагаемых:

$$\vdash \left(\left[\sum_{k=1}^{n} V_k\right]=[V_1]=\ldots=[V_n]\right). \tag{20}$$

Таким образом, из определения операции сложения ФВ и формулы (11) следует *утверждение*: «размерность суммы $\sum_{k=1}^{n} V_k$ любого числа ФВ: $V_1, \ldots, V_n$ равна размерности каждого ее слагаемого». Отрицание истинности этого утверждения влечет за собой известный тезис теории размерностей ФВ: «Сложение ФВ с различными размерностями не имеет смысла».

Легко показать, что формула

$$\vdash ([U]=[UV]=[V]), \tag{21}$$

аналогичная формуле (19), верна для *безразмерных* ФВ U и V, т. е. когда $[U]=[V]=[1]$. Эту формулу нетрудно обобщить на любое число n *безразмерных* ФВ:

$$\vdash \left(\left[\prod_{k=1}^{n} V_k\right]=[V_1]=\ldots=[V_n]\right), \tag{22}$$

где $[V_k]=[1]$ для всякого k. Если, в частности, $V_1=\ldots=V_n=V$, то из нее следует формула

$$\vdash ([V]^n=[V]), \tag{23}$$

истинная для любой безразмерной ФВ V.

Для небезразмерных ФВ U и V формула (21), очевидно, не верна даже в том случае, когда $[U]=[V]$. В этом случае, как известно, $[UV]\neq\neq[U]=[V]$.

§ 6. До сих пор мы занимались главным образом выводом основных формул теории размерностей ФВ в некоторой одной системе единиц ФВ, например в СИ.

Теперь мы кратко рассмотрим вопрос о размерностях ФВ в некоторых двух *различных системах* S_0 и S_1 единиц ФВ. Размерности ФВ U и V в системах S_0 и S_1 обозначим соответственно символами $[U]_0$, $[V]_0$ и $[U]_1$, $[V]_1$.

Нас интересуют прежде всего такие ФВ U и V, для которых верны следующие формулы:

$$(a_0) \vdash ([U]_0=[V]_0), \qquad \overline{[U]_1=[V]_1}. \tag{a_1}$$

Если S_0 — система Гаусса, а S_1 — СИ, то примерами формул (a_0) и (a_1) могут служить следующие формулы:

$$(a_{01}) \vdash ([C]_0=[L]_0), \qquad \overline{[C]_1=[L]_1}, \tag{a_{11}}$$

$$(a_{02}) \vdash ([C]_0=[l]_0), \qquad \overline{[C]_1=[l]_1}, \tag{a_{12}}$$

где C — емкость, L — индуктивность и l — длина.

Действительно, в системе Гаусса емкость, индуктивность и длина имеют одинаковую размерность — размерность длины.

В СИ эти ФВ имеют различные размерности, а именно:

$$[C]_1=\mathrm{L}^{-2}\mathrm{M}^{-1}\mathrm{T}^4\mathrm{I}^2, \quad [L]_1=\mathrm{L}^2\mathrm{M}\mathrm{T}^{-2}\mathrm{I}^{-2}, \quad [l]_1=\mathrm{L},$$

где L, M, T и I — обобщенные обозначения единиц: длины, массы, времени и силы тока.

Основное отличие СИ от системы Гаусса заключается в том, что размерности многих ФВ, одинаковые в системе Гаусса, в СИ являются различными. Например, напряженности E и H и индукции D и B электрического и магнитного полей в системе Гаусса имеют, как известно, одинаковую размерность:

$$[E]_0=[H]_0=[D]_0=[B]_0=\mathrm{L}^{-1/2}\mathrm{M}^{1/2}\mathrm{T}^{-1},$$

а в СИ размерности этих ФВ различны:

$$[E]_1=\mathrm{LMT}^{-3}\mathrm{I}^{-1},\quad [H]_1=\mathrm{L}^{-1}\mathrm{I},\quad [D]_1=\mathrm{L}^{-2}\mathrm{TI},\quad [B]_1=\mathrm{MT}^{-2}\mathrm{I}^{-1}.$$

Из неравенства размерностей ФВ E, H, D и B в СИ следует, в силу постулата ($A0$), бессмысленность равенств

$$E=D,\quad E=H,\quad E=B,\quad D=H,\quad D=B,\quad H=B$$

в единицах СИ.

Подобно тому, как спектральные приборы, имеющие «разрешающую силу» большую, чем у обычного школьного спектроскопа прямого зрения, позволяют точнее различать исследуемые спектры, СИ позволяет более тонко различать ФВ и их размерности, чем система Гаусса. Используя эту аналогию, мы можем сказать, что СИ имеет большую «различительную способность», чем система Гаусса.

Другим неоспоримым преимуществом СИ перед системой Гаусса является то, что в СИ размерность любой ФВ может быть представлена через размерности основных ФВ в виде произведения $\prod_{k=1}^{n}[V_k]^{m_k}$, где все m_k — *целые числа* в соответствии с шестым постулатом Флейшманна [7, с. 17].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Бочвар Д. А.//Матем. сб. 1938. **4 (46)**, № 2. С. 287—308. [2] Бочвар Д. А.//Матем. сб. 1943. **12 (54)**, № 3. С. 353—370. [3] Шестаков В. И.//Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон. 1983. **24**, № 4. С. 40—45. [4] Шестаков В. И.//Там же. 1979. **20**, № 6. С. 47—55. [5] Fleischmann R.//Zs. Phys. 1951. **129**. P. 377—400. [6] Fleischmann R. Einfuhrung in die Physik. Weinheim, 1973. [7] Камке Д., Кремер К. Физические основы единиц измерения. М., 1980.

Поступила в редакцию
16.04.86