КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 538.3

О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ АНСАМБЛЯ ЧАСТИЦ С ПОЛЕМ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

А. М. Хапаев, И. В. Пономарев

(кафедра математики)

Постановка задачи. Возможность ускорения заряженных частиц полем электромагнитной волны с переменной фазовой скоростью $c/n(z)$ показана в работе [1]. Отдача энергии ансамблем частиц полю электромагнитной волны анализировалась в [2]. Последняя работа послужила началом большого цикла исследований, в основу которых положено численное моделирование процесса взаимодействия ансамбля частиц с полями различных конфигураций.

Для построения аналитической модели взаимодействия ансамбля частиц с полем плоской волны рассмотрим движение релятивистских частиц при $z\geqslant 0$ в волне с амплитудой E_0 и частотой ω, описываемой вектор-потенциалом A, в присутствии постоянного магнитного поля:

$$\mathbf{H}=H\mathbf{k},\ \mathbf{A}=\operatorname{Re}A\mathbf{i}+\operatorname{Im}A\mathbf{j},\ A=(cE_0/\omega)\,[f'(z)]^{-1/2}\exp[i(f(z)-\omega t)],\qquad(1)$$

где $f(z)$ — фаза волны, связанная с $n(z)$, $n(z)=f'(z)$ в приближении эйконала. В качестве модели ансамбля частиц для описания энергообмена с волной (1) выбираем моноэнергетическое электронное «кольцо» [2] с равномерным распределением по импульсам в поперечной плоскости $(p_x,\ p_y)$ на входе в область взаимодействия при $z=0$. На выходе из области взаимодействия будем искать среднюю энергию пучка частиц как функционал от z, $f(z)$, $f'(z)$:

$$\langle\gamma(z)\rangle=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}d\theta_0\gamma(\theta_0,\ z,\ f,\ f'),\ \gamma=dt/d\tau=(1-v^2/c^2)^{-1/2},$$

где θ_0 — угол, определяющий положение электрона на кольце в момент влета в область существования поля (1), $\gamma=E/m_0c^2=1/\sqrt{1-\beta^2}$ — отношение энергии электрона (E) к энергии покоя (m_0c^2), $\beta=v/c$ — безразмерная скорость.

Построение функционала. Запишем релятивистские уравнения движения электрона в поле (1) и дисперсионное соотношение в цилиндрической системе координат:

$$\begin{cases}\dot r=c\varepsilon\cos\psi/\sqrt{f'},\\ \dot\theta=\omega_0+\omega R+\mu r^2-c\varepsilon\sin\psi/r\sqrt{f'},\\ \dot z^2=\omega^2[(R-r^2)^2-1]-\varepsilon^2\omega^2\cos^2\psi/f'-r^2\omega^2\left[-\omega_0+c\varepsilon\sin\psi/\sqrt{f'\sin f'}\ r\right]^2/c^2,\end{cases}\qquad(2)$$

где $r=(x^2+y^2)^{1/2}$, $\psi=f-\theta$, $\theta=\omega t-\varphi$, $\varphi=\operatorname{arctg}(y/x)$, $\omega_0=eH/(mc)$, $R=\gamma_0+\mu r_0^2$ — интеграл движения, обусловленный циркулярной поляризацией волны, $\mu=\omega\omega_0/2c^2$, r_0 — радиус электронного кольца при $z=0$. Точкой обозначена производная по собственному времени. Решение системы (2) во втором порядке теории возмущений по $\varepsilon=eE_0/(m\omega c)$ позволяет определить энергию отдельной частицы γ как функционал, зависящий от пролетной длины z, функций f, f', описывающих изменение амплитуды и фазы поля от z, угла θ_0, задающего начальное положение частицы на «кольце». Для перехода к ансамблю частиц проводилось усреднение по начальной фазе θ_0. При этом функционал, описывающий взаимодействие ансамбля релятивистских частиц с полем (1) принимает вид*

* В силу ограниченности объема данной статьи не представляется возможным привести схему построения решения системы (2) и усреднения по углу.

$$\langle\gamma\rangle = \gamma_0 + \sigma_1 \int_0^z dx\cdot \operatorname{Im} F + \sigma_2 \int_0^z dx\cdot x \operatorname{Re} F + \sigma_3 \Big[\Big(\int_0^z dx\cdot x \operatorname{Re} F\Big) \times$$

$$\times \Big(\int_0^z dx\cdot \operatorname{Im} F\Big) - \Big(\int_0^z dx\cdot \operatorname{Re} F\Big)\Big(\int_0^z dx\cdot x \operatorname{Im} F\Big)\Big]. \qquad (3)$$

Здесь

$$F = \exp(i\psi)/\sqrt{f'},\ \sigma_3 = \varepsilon^2\omega[\gamma_0^2(1-\beta_{\parallel 0}^2) - 1][1 - \delta(\delta - 1/\beta_{\parallel 0})]/[2\omega_0(\gamma_0\beta_{\parallel 0})^2],$$

$$\sigma_1 = \varepsilon^2(\gamma_0^2 - 1)(\gamma_0\beta_{\parallel 0})^3/\sqrt{f'(0)},\ \sigma_2 = \varepsilon^2[1 - \gamma_0^2(1-\beta_{\parallel 0}^2)](\delta^2 - 1)/2(\gamma_0\beta_{\parallel 0})^3,$$

$$\delta = (1 + \omega_0/\omega\gamma_0)/\beta_{\parallel 0},$$

γ_0, $c\beta_{\parallel 0}$ — начальная энергия и z-компонента скорости частиц.

Исследование функционала. Выражение (3) является функционалом от $f(z)$, нелокальным при $\sigma_3 \neq 0$. При исследовании его на экстремум будем предполагать, что на функцию $f(z)$ и ее производную наложены следующие ограничения:

$$1 < f'(z) < n_{\max}, \qquad f(z=0) = 0, \qquad (4)$$

где $n_{\max}$ — максимально достижимый показатель преломления среды. Без ограничения (4) функция $f(z)$, для которой $\langle\gamma\rangle$ принимает максимальное или минимальное значение, сингулярна или функционал (3) не ограничен. Решение на экстремум задачи (3)—(4) состоит из кусочного набора экстремалей $f_{\text{ext}}(z)$ — решений уравнений Эйлера (5) и прямых $f'=1$, $f'=n_{\max}$. Точки сопряжения на отрезке $[0, z]$ определяются из условия трансверсальности и непрерывности $f(z)$. Уравнение Эйлера для построенного функционала (3) представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка относительно функции $F(z, f, f')$ [3]:

$$\operatorname{Im}\left\{\frac{d}{dz}\left[(X + zY)\frac{\partial F}{\partial f'}\right] - (X + zY)\frac{\partial F}{\partial f}\right\} = 0, \qquad (5)$$

коэффициенты которого после получения решения в общем виде $f^*(X, Y, \sigma_i, z)$ следует приравнять

$$X = \sigma_1 + \sigma_3 \int_0^z dx\cdot xF^*(f_{\text{ext}}^*, f_{\text{ext}}'^*),\ Y = i\sigma_2 + \sigma_3 \int_0^z dx\cdot F^*(f_{\text{ext}}^*, f_{\text{ext}}'^*).$$

Решение уравнения (5) с переменными коэффициентами при произвольных значениях параметров, описывающих начальные состояния ансамбля частиц: γ_0, $\beta_{\parallel 0}$, r_0 и поля плоской волны и постоянного магнитного поля: ω, E_0, ω_0, может быть получено только численным интегрированием. Таким образом, задача электрон-волнового взаимодействия сводится к исследованию уравнения (5) и расчету на основе построенных решений функционала (3).

Анализ задачи при конкретных значениях параметров. Задача полного исследования уравнения (5) и построения функционала (3) в широком интервале начальных условий на ансамбль электронов и электродинамическую систему выходит за рамки данного краткого сообщения. Имеет смысл в качестве первого приложения применить предложенный метод анализа задачи электрон-волнового взаимодействия при конкретных параметрах.

Пусть параметры поля плоской волны (1) и параметры электронного ансамбля на входе в область взаимодействия связаны условием гирорезонанса [2] $\gamma_0(1-\beta_{\parallel 0}) = \omega_0/\omega$. При этом $\sigma_3 = 0$ и функционал (3) переходит в локальный, соответственно в уравнении (5) $X = \sigma_1 = \text{const}$, $Y = i\sigma_2 = \text{const}$. Для удобства введем новый функционал $\bar{\eta}$, описывающий эффективность энергообмена с волной и линейно связанный с (3):

$$\bar{\eta} = (\gamma_0 - \langle\gamma\rangle)/(\gamma_0 - 1) = [\sigma_1/(\gamma_0 - 1)] \int_0^z dx\sqrt{1 + s^2x^2} \times$$

$$\times \sin[\psi(x) + \varphi(x)]/\sqrt{f'(x)}, \qquad (6)$$

где $\varphi(x) = \arccos\left(1/\sqrt{1 + s^2x^2}\right)$, $s = \sigma_2/\sigma_1$ — результат свертки первых двух членов функционала (3). Вопрос о нахождении экстремальных значений эффективности вза-

имодействия сводится на данном этапе к решению уравнения Эйлера (5) для $F(x, y, y')$, нелинейно зависящей от производной y', что представляется возможным сделать только численными методами. Однако задача поиска экстремальных значений функционала (6) допускает аналитическое решение, если предположить, что $f(x)$ принадлежит к классу функций медленно меняющихся. Это соответствует взаимодействию электронного кольца с плоской волной с постоянной фазовой скоростью и существенно упрощает вид подынтегральной функции $F(x, y, y') \to F(x, y)$. Уравнение Эйлера (5) сводится к $F_y=0$. Решения его, т. е. экстремальные значения ψ, f при условии $\sigma_3=0$, следуют непосредственно: $\psi_{\text{ext}}=f_{\text{ext}}-\theta=(2k+1)\pi/2$, где $\theta=\omega\gamma_0\delta_0 z/c\beta_{\parallel 0}$ — решение системы (2). При этом $\bar{\eta}$ (6) является осциллирующей функцией от z, поэтому необходимо задавать порядковый номер k экстремума на правом конце области взаимодействия $[0, z_k]$. Четные номера k соответствуют минимуму $\bar{\eta}(z_k)$, нечетные — максимуму.

Энергообмен между электронным «кольцом» и волной приводит к набору или потере энергии. Рост амплитуды колебаний энергии связан с некоторым упрощением модели.

Основные результаты работы можно кратко свести к следующим. На основе предложенного метода решения задачи электрон-волнового взаимодействия построен функционал, описывающий эффективность взаимодействия с ансамблем электронов (3). Получено дифференциальное уравнение Эйлера (5), решение которого определяет функцию $f(z)$, оптимизирующую значение функционала (3). Предложенный метод решения задачи электрон-волнового взаимодействия применен к анализу конкретного примера.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Большов Л. А. и др.//Современные проблемы математической физики и вычислительной математики. М., 1982. С. 64—71. [2] Гапонов А. В., Петелин М. И., Юлпатов В. К.//Изв. вузов. Радиофизика. 1967. 10, № 9—10. С. 1414—1453. [3] Буслаев В. С. Вариационное исчисление. Л., 1980.

Поступила в редакцию
16.06.86

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1987. Т. 28, № 3

УДК 530.145.6

ПРОНИЦАЕМ ЛИ БАРЬЕР λx^{-2}?

В. Б. Гостев, А. Р. Френкин

(кафедра теоретической физики)

Вопрос, вынесенный в заголовок настоящей заметки, очень давно был предметом обсуждения в физическом «фольклоре». Несмотря на то что уравнение Шрёдингера (УШ), в котором положено $\hbar=2m=1$,

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}-\frac{s(s+1)}{x^2}+E\psi=0,\quad s=-\frac{1}{2}+\sqrt{\lambda+1/4},\quad -\frac{1}{2}<s<\frac{1}{2} \tag{1}$$

имеет точные решения [1, с. 227] ($x>0$, $E=k^2$, $k>0$)

$$\psi(x)=x^{1/2}Z_{s+1/2}(kx) \tag{2}$$

($Z_\mu(y)$ — цилиндрическая функция), среди которых можно выбрать волновую функцию с асимптотикой ($x\to+\infty$) типа прошедшей волны $\psi(x)\simeq e^{ikx}$, найти асимптотику этого же решения при $x\to-\infty$ и по ней коэффициент прохождения $T(E)$ [2, с. 100—107] затруднительно из-за разрыва решений (2) или их производных при $x=0$.

Проблема перехода через особую точку $x=0$ возникает и при построении четных решений УШ (1) в поле удерживающего потенциала (например, $V(x)=x^2$). До недавнего времени считалось, что барьер (и даже яма $-1/2<s<0$) $s(s+1)x^{-2}$ непроницаем [3], а дискретные уровни в удерживающем поле с этой особенностью дважды вырождены по четности [4, 5], например, для потенциала

$$V(x)=x^2+s(s+1)x^{-2} \tag{3}$$