

имодействия сводится на данном этапе к решению уравнения Эйлера (5) для $F(x, y, y')$, нелинейно зависящей от производной y' , что представляется возможным сделать только численными методами. Однако задача поиска экстремальных значений функционала (6) допускает аналитическое решение, если предположить, что $f(x)$ принадлежит к классу функций медленно меняющихся. Это соответствует взаимодействию электронного кольца с плоской волной с постоянной фазовой скоростью и существенно упрощает вид подынтегральной функции $F(x, y, y') \rightarrow F(x, y)$. Уравнение Эйлера (5) сводится к $F_y = 0$. Решения его, т. е. экстремальные значения ψ, f при условии $\sigma_3 = 0$, следуют непосредственно: $\psi_{\text{ext}} = f_{\text{ext}} - \theta = (2k+1)\pi/2$, где $\theta = \omega y_0 \delta_0 z / c \beta_{\text{по}}$ — решение системы (2). При этом η (6) является осциллирующей функцией от z , поэтому необходимо задавать порядковый номер k экстремума на правом конце области взаимодействия $[0, z_k]$. Четные номера k соответствуют минимуму $\eta(z_k)$, нечетные — максимуму.

Энергообмен между электронным «кольцом» и волной приводит к набору или потере энергии. Рост амплитуды колебаний энергии связан с некоторым упрощением модели.

Основные результаты работы можно кратко свести к следующим. На основе предложенного метода решения задачи электрон-волнового взаимодействия построен функционал, описывающий эффективность взаимодействия с ансамблем электронов (3). Получено дифференциальное уравнение Эйлера (5), решение которого определяет функцию $f(z)$, оптимизирующую значение функционала (3). Предложенный метод решения задачи электрон-волнового взаимодействия применен к анализу конкретного примера.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Большов Л. А. и др. // Современные проблемы математической физики и вычислительной математики. М., 1982. С. 64—71. [2] Гапонов А. В., Петелин М. И., Юлпатов В. К. // Изв. вузов. Радиофизика. 1967. 10, № 9—10. С. 1414—1453. [3] Буслаев В. С. Вариационное исчисление. Л., 1980.

Поступила в редакцию
16.06.86

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1987. Т. 28. № 3

УДК 530.145.6

ПРОНИЦАЕМ ЛИ БАРЬЕР λx^{-2} ?

В. Б. Гостев, А. Р. Френкин

(кафедра теоретической физики)

Вопрос, вынесенный в заголовок настоящей заметки, очень давно был предметом обсуждения в физическом «фольклоре». Несмотря на то что уравнение Шрёдингера (УШ), в котором положено $\hbar = 2m = 1$,

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} - \frac{s(s+1)}{x^2} + E\psi = 0, \quad s = -\frac{1}{2} + \sqrt{\lambda + 1/4}, \quad -\frac{1}{2} < s < \frac{1}{2} \quad (1)$$

имеет точные решения [1, с. 227] ($x > 0$, $E = k^2$, $k > 0$)

$$\psi(x) = x^{1/2} Z_{s+1/2}(kx) \quad (2)$$

($Z_\mu(y)$ — цилиндрическая функция), среди которых можно выбрать волновую функцию с асимптотикой ($x \rightarrow +\infty$) типа прошедшей волны $\psi(x) \approx e^{ikx}$, найти асимптотику этого же решения при $x \rightarrow -\infty$ и по ней коэффициент прохождения $T(E)$ [2, с. 100—107] затруднительно из-за разрыва решений (2) или их производных при $x=0$.

Проблема перехода через особую точку $x=0$ возникает и при построении четных решений УШ (1) в поле удерживающего потенциала (например, $V(x) = x^2$). До недавнего времени считалось, что барьер (и даже яма $-1/2 < s < 0$) $s(s+1)x^{-2}$ непроницаем [3], а дискретные уровни в удерживающем поле с этой особенностью дважды вырождены по четности [4, 5], например, для потенциала

$$V(x) = x^2 + s(s+1)x^{-2} \quad (3)$$

предлагалось использовать в качестве четного и другое решение УШ, непрерывно переходящее при $s \rightarrow 0$ в четное осцилляторное [6].

На наш взгляд, плодотворным подходом к решению этой проблемы является предложенный недавно [7, 8] метод самосопряженного расширения дифференциального оператора (см., например, [9]) — гамильтониана в УШ (1). В работе [8] перечислены все самосопряженные расширения гамильтониана (1) ($0 \leq s < 1/2$), образующие двухпараметрическое семейство, вычислен коэффициент прохождения для каждого значения параметров, но не сделан выбор физически предпочтительного расширения. А именно эта проблема выбора «правильного» самосопряженного расширения тесно связана с физикой описываемых явлений» [9].

Выбор для случая потенциала (3) был сделан в [7] на основе следующих соображений. При $-1/2 < s < 1/2$ имеется два решения УШ $\psi_{\pm}(x) \in I_2(0, a)$ с поведением ($x \rightarrow +0$):

$$\psi_+(x) \simeq x^{-s}, \quad (4)$$

$$\psi_-(x) \simeq x^{1+s}. \quad (5)$$

Выбирая в качестве четного решение

$$\psi_{\alpha}(x) = \cos \alpha \psi_+(|x|) + \sin \alpha \psi_-(|x|), \quad -\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2 \quad (6)$$

и учитывая особенность логарифмической производной $\psi_{\alpha}(x)$, $x \rightarrow +0$, получаем дополнительный точечный потенциал [10]

$$U(x) = \begin{cases} -2s|x|^{-1}\delta(x) + 2(2s+1)|x|^{2s}\delta(x) \operatorname{tg} \alpha, & -\pi/2 < \alpha < \pi/2, \\ \pm 2(1+s)|x|^{-1}\delta(x), & \alpha = \pm \pi/2. \end{cases} \quad (7)$$

Потребовав, чтобы при выключении барьера (ямы) $s \rightarrow 0$ не было остаточного потенциала (отсутствовало явление Клаудера [11, 5]), мы приходим к условию $\alpha(s)|_{s=0} = 0$, а введя требование минимальности числа слагаемых дополнительного потенциала, при всех s получаем физическое расширение гамильтониана с особенностью x^{-2} (и $|x|^{-\nu}$, $1 \leq \nu < 2$ [12])

$$\alpha = 0. \quad (8)$$

Естественно рассматривать свободное движение $V(x) = 0$ с барьером (1) как предел движения в поле удерживающего потенциала $V(x) = c|x|^{\gamma}$; $c, \gamma > 0$, $s \rightarrow +0$ (близкий подход использовался в классической работе [13]). Тогда и для УШ (1) в качестве физического расширения гамильтониана надо взять «четное» расширение (8): функции $\psi_+(x)$ (4) из семейства (2) продолжаются через $x=0$ четко, $\psi_-(x)$ (5) — нечетно. Расширение с $\alpha \neq 0$ можно рассматривать как движение в поле (3) с дополнительным потенциалом $\delta V = 2(2s+1)|x|^{2s} \operatorname{tg} \alpha \delta(x)$. По общим правилам [2, с. 100—107] в этом случае находим

$$T = \cos^2 \alpha \cos^2 s\pi (\cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha - b \sin s\pi \sin 2\alpha)^{-1}, \quad (9)$$

$$b = \Gamma(s+3/2) \Gamma^{-1}(-s+1/2) 2^{2s+1} k^{-(2s+1)}, \quad (10)$$

откуда для физического расширения (8) получаем простую формулу проницаемости барьера (ямы)

$$T = \cos^2 s\pi. \quad (11)$$

Независимость коэффициента T (11) от энергии вызвана противодействием потенциала (7), $\alpha=0$, основному потенциалу (1) и объясняется однородностью степени -2 гамильтониана (1) вместе с потенциалом (7). При $\alpha \neq 0$, $\pm \pi/2$ однородности нет и у коэффициента T (9) появляется «правильная» [2, с. 100—107] зависимость от энергии через множитель k^{2s+1} (10). Однородность гамильтониана (1), (7) при $\alpha=0$ является дополнительным веским аргументом в пользу выбора расширения (8). Заметим, что ток $j = \operatorname{Im}(\psi^* \psi')$ сохраняется везде, включая $x=0$, несмотря на разрыв $\psi(0)$, $\psi'(0)$, при всех значениях $-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2$.

Отметим, что «наивные» приемы вычисления коэффициента T — квазиклассический метод и обрезание потенциала [14], [2, с. 143] приводят к $T=0$, но они некорректны: условия применимости квазиклассического приближения [2, с. 215—221] не выполнены и не учитывается потенциал (7); матричный элемент возмущения при

обрезании особенности в интервале $|x| < a \quad \sim \lambda \int_{-a}^a |x|^{-2s} (x^{-2} - a^{-2}) dx = \infty$

расходится.

Предложенный способ вычисления проникаемости барьера (ямы) после некоторой модификации применим и к четному асимптотически свободному потенциалу с особенностью $\lambda|x|^{-\nu}$, $1 \leq \nu < 2$. В частности, в кулоновском случае $\nu=1$ можно с помощью точных кулоновских функций [1, с. 235] и дополнительного индуцированного потенциала [12]

$$U(x) = \begin{cases} 2\lambda \ln|x|\delta(x) + 2 \operatorname{tg} \alpha \delta(x), & -\pi/2 < \alpha < \pi/2, \\ \pm 2|x|^{-1}\delta(x), & \alpha = \pm \pi/2 \end{cases} \quad (12)$$

получить точное аналитическое выражение для коэффициента T :

$$T = C_0^4 E \cos^2 \alpha [(C_0^4 E + \lambda^2 \mu^2) \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - \lambda \mu \sin 2\alpha]^{-1}, \quad (13)$$

где

$$C_0 = [\pi \lambda k^{-1} (e^{\pi \lambda k^{-1}} - 1)]^{1/2},$$

$$\mu = \gamma + \ln 2 + 1/2 \ln E + \lambda^2 \sum_{j=1}^{\infty} [j(\lambda^2 + 4Ej^2)]^{-1},$$

$\gamma = 0,577 \dots$ — постоянная Эйлера.

При $0 < \nu < 1$ работает стандартная теория [2, с. 82—86], так как нет разрыва $\psi(0)$, $\psi'(0)$. При $\nu=2$, $s \geq 1/2$; $\nu > 2$, $\lambda > 0$ барьер непроницаем: $T=0$. При $\nu=2$, $s \leq -1/2$; $\nu > 2$, $\lambda < 0$ имеет место падение на дно ямы [2, с. 143—146]. Мы считаем этот случай нефизическим.

Таким образом, предложенный метод физически выбранного самосопряженного расширения гамильтониана с особенностью x^{-2} дает однозначное конечное значение для проникаемости этого барьера (ямы) (11) и закрывает проблему, указанную в заголовке настоящей статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Гольдбергер М., Ватсон К. Теория столкновений. М., 1967. [2] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. М., 1974. [3] Шадан К., Сабатье П. Обратные задачи в квантовой теории рассеяния. М., 1980. С. 113. [4] Calogero F. J. // J. Math. Phys. 1969. 10. P. 2191—2219. [5] Klauder J. // Acta Phys. Austriaca Suppl. 1973. 11. P. 341—387. [6] Малкин И. А., Манько В. И. Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем. М., 1979. С. 109. [7] Гостев В. Б., Минеев В. С., Френкин А. Р. // ТМФ. 1986. 68. С. 45—57. [8] Dittich I., Exner P. // J. Math. Phys. 1985. 26. P. 2000—2008. [9] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. М., 1978. Т. 2. С. 156—185. [10] Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. М., 1960. Т. 2. С. 595—596. [11] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. М., 1982. Т. 4. С. 78. [12] Гостев В. Б., Минеев В. С., Френкин А. Р. // ТМФ. 1987. 70. С. 384—393. [13] Леонтович М. А., Мандельштам Л. И. // Леонтович М. А. Избранные труды. М., 1985. С. 56—60. [14] Case K. M. // Phys. Rev. 1950. 80. P. 792—801.

Поступила в редакцию
01.10.86

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1987. Т. 28, № 3

АТОМНАЯ И ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА

УДК 539.186

ЗАХВАТ ЭЛЕКТРОНА В ВОЗБУЖДЕННЫЕ СОСТОЯНИЯ ПРИ СТОЛКНОВЕНИЯХ ЯДЕР С АТОМАМИ

Ю. А. Шурыгина, В. С. Сенашенко, Я. А. Теплова

(НИИЯФ)

В последние годы теория электронного захвата интенсивно развивается, однако все еще мало изученной остается проблема описания захвата электрона в возбужденные состояния в области промежуточных и больших энергий. Исключение состав-