1980. [14] Гинзбург В. Л. О физике и астрофизике. М., 1985. С. 52. [15] Скобелев В. В.//ЖЭТФ. 1976. 71. С. 1263—1267. [16] Лоскутов Ю. М., Скобелев В. В.//Ядерная физика. 1980. 31. С. 1279—1285. [17] Лоскутов Ю. М.// //ТМФ. 1985. 65. С. 141—150. [18] Curtis Michel F.//Rev. Mod. Phys. 1982. 54. P. 1—66.

Поступила в редакцию
10.04.86

УДК 530.12:531.51

СПИНИРУЮЩАЯ ЖИДКОСТЬ В КАЛИБРОВОЧНОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

В. А. Короткий, Ю. Н. Обухов

(кафедра теоретической физики)

Несмотря на общеизвестные успехи теории гравитации, основанной на уравнениях поля Гильберта—Эйнштейна, наличие принципиальных трудностей в общей теории относительности (ОТО) (проблема энергии, сингулярности и др.) и необходимость объединения теории гравитации с квантовой теорией стимулировали исследование различных обобщений ОТО в рамках калибровочного подхода, столь успешно применявшегося в теории сильных и электрослабых взаимодействий. Естественным расширением ОТО и явилась интенсивно исследуемая ныне калибровочная теория гравитации, учитывающая спин материи.

В пуанкаре-калибровочной теории [1, 2] гравитационное поле описывается тетрадой $h^a{}_\mu$ и локально-лоренцевой связностью $\Gamma^a{}_{b\mu}$. С помощью этих потенциалов на пространственно-временном многообразии определяются метрика $g_{\mu\nu}=h^a{}_\mu h^b{}_\nu\eta_{ab}$ и напряженности калибровочного поля: локально-лоренцева кривизна

$$R^a_{b\mu\nu}=\partial_\mu\Gamma^a_{b\nu}-\partial_\nu\Gamma^a_{b\mu}+\Gamma^a_{c\mu}\Gamma^c_{b\nu}-\Gamma^a_{c\nu}\Gamma^c_{b\mu} \tag{1}$$

и кручение

$$Q^a_{\cdot\,\mu\nu}=-\frac{1}{2}\left(\partial_\mu h^a_\nu-\partial_\nu h^a_\mu+\Gamma^a_{b\mu}h^b_\nu-\Gamma^a_{b\nu}h^b_\mu\right). \tag{2}$$

Здесь и далее греческие индексы μ, ν, α, $\beta=0$, 1, 2, 3 относятся к координатному реперу, латинские индексы из начала алфавита a, b, $c\ldots=0$, 1, 2, 3 — к произвольному (неголономному) ортонормированному 4-реперу, латинские индексы из середины алфавита i,j, $k\ldots$ пробегают значения 1, 2, 3 и будут использоваться для описания характеристик среды. Метрика Минковского $\eta_{ab}=\mathrm{diag}(+1, -1, -1, -1)$, так что $\eta_{ij}=-\delta_{ij}$.

Пространство-время, характеризуемое нетривиальными кривизной и кручением (1), (2), называется пространством Римана—Картана U_4. Уравнение (2) показывает, что кручение совпадает с антисимметричной частью мировой аффинной связности

$$\Gamma^\alpha{}_{\beta\mu}=h^\alpha{}_a\Gamma^a{}_{b\mu}h^b{}_\beta+h^\alpha{}_a\partial_\mu h^a{}_\beta, \tag{3}$$

а именно: $\Gamma^\alpha_{[\mu\nu]}=h^\alpha_a Q^a_{\cdot\,\mu\nu}$.

Источниками калибровочного гравитационного поля являются тензор энергии-импульса и тензор спина материи. Их определение для произвольных физических полей (спинорных и тензорных) не составляет труда, если известен соответствующий лагранжиан. Однако в космологических задачах в U_4, когда материя описывается с помощью гидродинамических понятий, до последнего времени применялась феноменологическая модель жидкости со спином Вейсенхоффа—Раабе [3]. В недавних работах [4—7] были предприняты попытки сформулировать теорию спинирующей жидкости в U_4 в рамках вариационного принципа, обобщающего спецрелятивистскую модель Альбваша [8]. Следует отметить, однако, что эти работы существенно используют формализм второго порядка, когда независимо варьируются метрика и кручение, и недостатком их является введение *ad hoc* дополнительных ограничений на плотность спина. В данной работе мы уточняем формулировку вариационного принципа, предложенного в [4], и обобщаем его на случай формализма первого порядка, когда в качестве независимых динамических переменных рассматриваются исходные калибровочные поля $h^a{}_\mu$ и $\Gamma^a{}_{b\mu}$.

Как обычно, жидкость со спином мы будем рассматривать как сплошную среду с микроструктурой [9]. Все физические характеристики среды получаются с помощью процедуры усреднения [8, 9], и ее движение определяется заданием в каждой точке вектора 4-скорости u^μ и триады векторов $b^\mu{}_i$, ортогональных друг другу и u^μ. Внутренние свойства среды характеризуются плотностью числа частиц ρ, плотностью внутренней энергии ε и удельной плотностью спинового момента μ^{ij}. Лагранжиан жидкости со спином зададим в виде

$$L_m = \varepsilon(\rho,\ s,\ \mu^{ij}) - (1/2)\,\rho\mu^{ij} b_i^\mu (\nabla_\sigma b_j^\nu)\, u^\sigma g_{\mu\nu} + h^{-1}\lambda_1 \partial_\mu (h\rho u^\mu) +$$

$$+ \lambda_2 u^\mu \partial_\mu X + \lambda_3 u^\mu \partial_\mu s + \lambda^{ab}(g_{\mu\nu} b_a^\mu b_b^\nu - \eta_{ab}), \tag{4}$$

где $h = \det h^a{}_\mu$, s — энтропия и X — лагранжева координата тождественности частиц [4]. Существенными с точки зрения описания взаимодействия жидкости с калибровочным гравитационным полем являются первые два члена в (4), а остальные слагаемые посредством лагранжевых множителей λ_1, λ_2, λ_3, $\lambda^{ab} = \lambda^{ba}$ накладывают связи на переменные жидкости, что гарантирует сохранение числа частиц, тождественности частиц, энтропии и ортогональности u^μ и триады $b^\mu{}_i$ (мы обозначили образованную ими тетраду $b^\mu{}_a : b^\mu{}_0 = u^\mu$; $b^\mu{}_i$, $i = 1, 2, 3$). Ковариантная производная в (4) определяется с помощью связности Римана—Картана (3). Термодинамические свойства спинирующей жидкости описываются обобщенным первым законом термодинамики, в котором учитывается вклад спиновой кинетической энергии

$$T ds = d\bar{\varepsilon} + p\, d(1/\rho) - (1/2)\,\omega_{ij} d\mu^{ij}, \tag{5}$$

где p — давление, T — температура и ω_{ij} — угловая скорость жидкости, $\bar{\varepsilon} = \varepsilon/\rho$.

Система уравнений, описывающая динамику взаимодействия жидкости и калибровочного гравитационного поля, вытекает из процедуры варьирования полного действия $S_{\text{tot}} = \int d^4x\, h\,(L_m + L_g)$ теории относительно гравитационных $h^a{}_\mu$, $\Gamma^a{}_{b\mu}$ и материальных переменных u^μ, $b^\mu{}_i$, ρ, μ^{ij}, s, X, λ. Не конкретизируя пока вида гравитационного лагранжиана $L_g(h,\ \Gamma)$, найдем уравнения движения жидкости и источники пуанкаре-калибровочного поля:

$$T_a^\mu = \frac{1}{h}\,\frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta h^a_\mu}\,;\quad J^{\mu b}_{\cdot\cdot a} = \frac{1}{h}\,\frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta \Gamma^a_{b\mu}}. \tag{6}$$

Варьирование по неопределенным множителям Лагранжа λ приводит к обычному набору связей:

$$u^\mu \partial_\mu s = 0; \ u^\mu \partial_\mu X = 0; \tag{7а}$$

$$(1/h)\,\partial_\mu (h\rho u^\mu) = \overset{*}{\nabla}_\mu (\rho u^\mu) = (\nabla_\mu - 2Q^\nu_{\mu\nu})(\rho u^\mu) = 0; \tag{7б}$$

$$g_{\mu\nu} h^\mu_a h^\nu_b = \eta_{ab}. \tag{7в}$$

С учетом (7) варьирование по s, X, ρ, μ^{ij} дает соответственно

$$\rho T - \overset{*}{\nabla}_\mu (\lambda_3 u^\mu) = 0, \ \overset{*}{\nabla}_\mu (\lambda_2 u^\mu) = 0, \tag{8а}$$

$$\varepsilon + p - \rho u^\mu \partial_\mu \lambda_1 - (1/2)\,\rho \mu^{ij} b^\mu_i (\nabla_\sigma b^\nu_j)\, u^\sigma g_{\mu\nu} = 0, \tag{8б}$$

$$\omega_{ij} - b^\mu_i (\nabla_\sigma b^\nu_j)\, u^\sigma g_{\mu\nu} = 0, \tag{8в}$$

где при получении двух последних уравнений использовалось (5). Наконец, из варьирования по $b^\mu{}_0 = u^\mu$ и $b^\mu{}_i$ находим

$$-\rho\partial_\mu \lambda_1 - \lambda_2 \partial_\mu X - \lambda_3 \partial_\mu s - (1/2)\,\rho\mu^{ij} b^\alpha_i \nabla_\mu b^\beta_j g_{\alpha\beta} + 2\lambda^{0a} b^\nu_a g_{\mu\nu} = 0, \tag{9}$$

$$-\rho\mu^{ij}(\nabla_\sigma b^\nu_j)\, u^\sigma - (1/2)\,\rho u^\sigma (\partial_\sigma \mu^{ij})\, b^\nu_j + 2\lambda^{ia} b^\nu_a = 0. \tag{10}$$

Из уравнений (9) и (10) нетрудно получить явный вид лагранжевых множителей λ^{ab}. Действительно, свертка (9) с u^μ с учетом (7в) и (8б) дает

$$2\lambda^{00} = \varepsilon + p. \tag{11а}$$

Аналогично сворачивая (10) с u^μ, получаем

$$2\lambda^{i0} = \rho\mu^{ij} u_\alpha (\nabla_\sigma b^\alpha{}_j)\, u^\sigma, \tag{11б}$$

а свертка (10) с $b^\mu{}_k$ приводит к выражению

$$-\rho\mu^{ij} b^\mu_k (\nabla_\sigma b^\nu_j)\, g_{\mu\nu} u^\sigma - \frac{1}{2}\,\rho u^\sigma (\partial_\sigma \mu^{ij})\, \eta_{jk} + 2\eta_{ak}\lambda^{ia} = 0.$$

Симметричная часть последнего уравнения дает оставшиеся множители

$$2\lambda^{ij} = \rho\mu^{(i}{}_{.k} b^{j)}_\alpha (\nabla_\sigma b^{\alpha k})\, u^\sigma, \tag{11в}$$

тогда как антисимметричная часть не содержит множителей Лагранжа, а является уравнением для удельной плотности спина

$$u^\sigma \partial_\sigma \mu^{ij} = 2\mu^{[i}{}_k b^{j]}_\alpha (\nabla_\sigma b^{\alpha k})\, u^\sigma. \tag{12}$$

В уравнениях (11в) и (12) мы ввели обозначения

$$b^i{}_\mu \equiv \eta^{ij} g_{\mu\nu} b^\nu{}_j.$$

Нетрудно видеть, что условие ортонормированности материальной тетрады (7в) приводит к важному соотношению

$$b_{i\mu} b^\nu{}_i + u_\mu u^\nu = \delta^\nu{}_\mu. \tag{13}$$

Наконец найдем источники калибровочного гравитационного поля (6). Это нетрудно сделать, если заметить, что вариация мировой связности (3) имеет вид

$$\delta\Gamma^\alpha{}_{\beta\mu} = h_a{}^\alpha h^b{}_\beta \delta\Gamma^a{}_{b\mu} + h^\alpha{}_a \nabla_\mu (\delta h^a{}_\beta).$$

Тогда из (4) получим

$$J^{\mu}{}_{.a.}{}^{b} = -\frac{1}{2}\rho\mu^{ij} b_i^{\alpha} b_j^{\beta} h_{\alpha a} h_{\beta}^{b} u^{\mu}, \tag{14}$$

$$T^{\mu}{}_{.a} = h_a^{\mu}\left(\varepsilon - \rho u^{\nu}\partial_{\nu}\lambda_2 - \frac{1}{2}\rho\mu^{ij} b_i^{\alpha}(\nabla_{\sigma} b_j^{\beta}) g_{\alpha\beta} u^{\sigma}\right) +$$

$$+ h_{\nu\alpha}\left(\frac{1}{2}\rho u^{\sigma}(\partial_{\sigma}\mu^{ij}) b_i^{\nu} b_j^{\mu} - \rho\mu^{ij} b_i^{\mu}(\nabla_{\sigma} b_j^{\nu}) u^{\sigma} + 2\lambda^{cd} b_c^{\mu} b_d^{\nu}\right). \tag{15}$$

Подставляя в (15) λ^{ab} из (11), а также учитывая (8б), (12) и очевидное тождество

$$b_{\alpha}{}^{j}(\nabla_{\sigma} b_k{}^{\alpha}) b_j{}^{\nu} = \nabla_{\sigma} b_k{}^{\nu} - u_{\alpha} u^{\nu}(\nabla_{\sigma} b_k{}^{\alpha}),$$

которое вытекает из (13), преобразуем (15) к виду

$$T^{\mu}{}_{.a} = -p h_a^{\mu} + h_{\nu a} u^{\mu}\left[(\varepsilon + p) u^{\nu} + \rho\mu^{ij} b_i^{\nu}(\nabla_{\sigma} b_j^{\alpha}) u^{\sigma} u_{\alpha}\right]. \tag{16}$$

Полученные из вариационного принципа уравнения (7)–(16) дают корректное описание классической жидкости Вейсенхоффа. Действительно, введем общековариантную плотность спина

$$s^{\alpha\beta} = \rho b^{\alpha}{}_i b^{\beta}{}_j \mu^{ij}. \tag{17}$$

В силу (7в) она автоматически удовлетворяет условию Френкеля

$$s^{\alpha\beta} u_{\alpha} = 0, \tag{18}$$

а источники калибровочного поля $J^{\mu}{}_{.\alpha\beta} = J^{\mu}{}_{.ab} h_{\alpha}^{a} h_{\beta}^{b}$; $T^{\mu}{}_{.\nu} = T^{\mu}{}_{.a} h_{\nu}^{a}$ задаются каноническими тензорами спина и энергии импульса жидкости Вейсенхоффа:

$$J^{\mu}{}_{.\alpha\beta} = -\frac{1}{2} s^{\mu}{}_{\alpha\beta}, \quad s^{\mu}{}_{.\alpha\beta} = u^{\mu} s_{\alpha\beta}, \tag{19}$$

$$T^{\mu}{}_{.\nu} = -p\delta_{\nu}^{\mu} + u^{\mu}\left[u_{\nu}(\varepsilon + p) - u^{\alpha}\overset{*}{\nabla}_{\sigma}(s^{\sigma}_{\alpha\nu})\right]. \tag{20}$$

Введем обобщение субстанциональной производной в пространстве Римана–Картана. Для любого тензорного поля φ_A определим ее очевидным образом [10]:

$$\dot{\varphi}_A = \overset{*}{\nabla}_{\mu}(\varphi_A u^{\mu}). \tag{21}$$

Тогда из (20) получаем плотность 4-импульса жидкости в виде

$$P_{\nu} = \varepsilon u_{\nu} - u^{\alpha}\dot{s}_{\alpha\nu}, \tag{22}$$

так что, как обычно, выполнено равенство

$$\varepsilon = T_{\mu\nu} u^{\mu} u^{\nu} = P_{\mu} u^{\mu}. \tag{23}$$

Нетрудно видеть, что угловая скорость жидкости, определяемая из (8в), задается в U_4 корректным общековариантным выражением

$$\omega_{\alpha\beta} = b^{i}{}_{\alpha} b^{j}{}_{\beta}\omega_{ij} = u^{\sigma}(u_{\alpha}\nabla_{\sigma} u_{\beta} + b^{j}{}_{\beta}\nabla_{\sigma} b_{j\alpha}), \tag{24}$$

где последнее равенство получено с помощью (13).

Теперь убедимся, что движение тензора плотности спина также описывается стандартным тензорным уравнением. Для этого домножим уравнение (12) на $\rho b^\alpha{}_i b^\beta{}_j$ и используем (13), (17) и (24). После несложных преобразований получим

$$\dot{s}^{\alpha\beta} = u^\alpha u_\mu \dot{s}^{\mu\beta} - u^\beta u_\mu \dot{s}^{\mu\alpha}. \tag{25}$$

В заключение отметим согласованность полученной теории с точки зрения ковариантных законов сохранения в U_4. Непосредственным следствием уравнения (25) является правильная связь антисимметричной части тензора энергии-импульса со спином; из (10) и (25) имеем

$$2T_{[\nu\mu]} = \overset{*}{\nabla}_\sigma s^\sigma_{\mu\nu}. \tag{26}$$

Уравнение трансляционного движения вытекает из закона сохранения тензора энергии-импульса [1] в U_4:

$$\overset{*}{\nabla}_\mu T^\mu{}_{\cdot\nu} - 2Q^a{}_{\cdot\mu\nu} T^\mu{}_{\cdot a} + \frac{1}{2} s^\mu{}_{\cdot ab} R^{ab}_{\mu\nu} = 0. \tag{27}$$

Соответствующие обобщенные уравнения Эйлера получаются, если умножить $\delta^\nu{}_\lambda - u^\nu u_\lambda$ на (27). В теории Эйнштейна—Картана, где $L_g = R = h^\mu{}_a h^\nu{}_b R^{ab}{}_{\mu\nu}$, кручение пропорционально спину [1, 2] и в силу условия Френкеля (18) второй член (27) исчезает, а уравнения Эйлера принимают вид

$$(-\delta^\mu_\nu + u^\mu u_\nu)\nabla_\mu p + (p+\varepsilon) u^\lambda \nabla_\lambda u_\nu - \nabla_\lambda (u^\lambda u^\alpha \dot{s}_{\alpha\nu}) + (1/2) s_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta}_{\mu\nu} u^\mu = 0. \tag{28}$$

Последнее слагаемое описывает силу Матиссона. Заметим, что свертка (28) с u^ν тождественно равна нулю и не приводит в отличие от [6] ни к каким противоречиям.

Таким образом, вариационный принцип для (4) обеспечивает корректную лагранжеву формулировку теории спинирующей жидкости Вейсенхоффа. Источниками калибровочного гравитационного поля при этом оказываются, как и в случае полевой материи, канонические тензоры спина и энергии-импульса жидкости. Полученная теория пригодна для исследования космологических моделей, в которых материя (галактики, кластеры галактик) обладает внутренним моментом. При этом принципиальное значение имеет возможность рассмотреть не только теорию Эйнштейна—Картана, но более широкий класс калибровочных гравитационных моделей, в которых L_g содержит квадратичные по кручению и кривизне члены.

В качестве последнего замечания подчеркнем преимущество использования формализма первого порядка. Применение независимых $h^a{}_\mu$ и $\Gamma^a{}_{b\mu}$ в качестве динамических переменных гравитационного поля является не только наиболее естественным в калибровочной теории, но и удобно технически. А именно: можно воспользоваться свободой локальных лоренцевых вращений гравитационных тетрад $h^a{}_\mu$ и в каждой точке U_4 совместить $h^a{}_\mu$ с материальной тетрадой u^μ, $b^\mu{}_i$. В этой калибровке решение гравитационных уравнений относительно $\Gamma^a{}_{b\mu}$ и $h^a{}_\mu$ сразу определяет и движение спинирующей жидкости. Отметим, что в такой калибровке спиновая кинетическая энергия — второй член в (4) — принимает стандартный (янг-миллсовский) вид взаимодействия калибровочного поля с соответствующим током:

$$-(1/2)\Gamma^i{}_{j\alpha} u^\alpha \mu_i{}^j,$$

а уравнения движения спиновой плотности (12) сводятся к выражению

$$u^{\alpha}\nabla_{\alpha}\mu^{ij}=u^{\alpha}(\partial_{\alpha}\mu^{ij}+\Gamma^{i}{}_{k\alpha}\mu^{kj}+\Gamma^{j}{}_{k\alpha}\mu^{ik})=0$$

— условию ковариантного постоянства μ^{ij} вдоль линий тока.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Пономарев В. Н., Барвинский А. О., Обухов Ю. Н. Геометродинамические методы и калибровочный подход к теории гравитационных взаимодействий. М., 1985. С. 168. [2] Иваненко Д. Д., Пронин П. И., Сарданашвили Г. А. Калибровочная теория гравитации. М., 1985. С. 144. [3] Weyssenhoff J., Raabe A.//Acta Phys. Polon. 1947. **9**, N 1. P. 7—18. [4] Ray J. R., Smalley L. L.// //Phys. Rev. Lett. 1982. **49**, N 15. P. 1059—1061; Phys. Rev. 1982. **D26**, N 10. P. 2615—2618, 2619—2622. [5] de Ritis R., Lavorgna M., Platania G., Stornaiolo C.//Phys. Rev. 1983. **D28**, N 4. P. 713—717; 1985. **D31**, N 8. P. 1854—1859. [6] Amorim R.//Phys. Rev. 1985. **D31**, N 12. P. 3099—3103. [7] Minkevic A. V., Karakura F.//J. Phys. 1983. **A16**. P. 1409—1418. [8] Halbwachs F. Theorie relativiste des fluides a spin. Paris, 1960. [9] Желнорович В. А. Модели материальных сплошных сред, обладающих внутренним электромагнитным и механическим моментами. М., 1980. С. 176. [10] Trautman A.//Bull. Acad. Polon. Sci, ser. sci. math., astr., phys. 1972. **20**, N 2. P. 185—190; P. 503—506; N 10. P. 895—896.

Поступила в редакцию
22.04.86

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1987. Т. 28, № 4

УДК 539.129

ЛЕПТОННЫЙ ВКЛАД В ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЙ ОПЕРАТОР W-БОЗОНА В ПОСТОЯННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

А. В. Борисов, В. Ч. Жуковский, М. Ю. Книжников, А. Н. Прокопеня

(кафедра теоретической физики)

После недавнего открытия промежуточных векторных бозонов [1] — переносчиков слабых взаимодействий — модель Вайнберга—Салама получила серьезное экспериментальное подтверждение. Однако дальнейшая проверка справедливости теории, в частности ее перенормируемости, требует вычисления радиационных поправок. В последнее время были рассмотрены, например, W-бозонный вклад в поляризационный оператор фотона и радиационный сдвиг массы нейтрино во внешнем магнитном поле [2]. В работе [3] был вычислен вклад калибровочного сектора в поляризационный оператор W-бозона в магнитном поле. Однако в том же порядке теории возмущений необходимо исследовать лептонный вклад в поляризационный оператор, который рассматривается в настоящей работе с использованием точных решений уравнений движения для заряженного векторного бозона в магнитном поле.

Согласно модели Вайнберга—Салама [4] уравнение движения W-бозона имеет вид

$$(\mathcal{D}_{\nu}\mathcal{D}^{\nu}+M^2)W^{\mu}+2ieF^{\mu\nu}W_{\nu}=0, \qquad (1)$$

где выбрана калибровка $\mathcal{D}_{\mu}W^{\mu}=0$, причем данное уравнение соответствует уравнению Прока с аномальным магнитным моментом $k=1$. Здесь $\mathcal{D}_{\mu}=\partial_{\mu}+ieA_{\mu}$, $A_{\mu}=(0,\ 0,\ -Hx,\ 0)$ — вектор-потенциал внешнего поля, $F_{\mu\nu}=\partial_{\mu}A_{\nu}-\partial_{\nu}A_{\mu}$, e и M — соответственно заряд и масса W-бозона. Решение уравнения (1) может быть записано в виде