ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 530.12

ТВИСТОРНО-КАЛИБРОВОЧНАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА—ГИЛЬБЕРТА

С. И. Вакару

(кафедра теоретической физики)

Дана твисторно-калибровочная интерпретация уравнений Эйнштейна—Гильберта, задача нахождения решения которых сведена к построению голоморфного расслоения над искривленной твисторной базой.

1. **Введение.** Теория твисторов — новый раздел математической физики — является синтезом основных идей комплексной алгебраической геометрии, релятивистской классической и квантовой теории поля, специальной и общей теории относительности.

Твисторная геометрия впервые была введена в 1967 г. в статье Р. Пенроуза [1]. В настоящее время твисторный формализм стал математически изящным, интенсивно развивающимся и плодотворным подходом к описанию оснований физики [2—4].

Калибровочный подход в теории поля является базой современных теорий объединения взаимодействий элементарных частиц. Вместе с тем различные модели калибровочных теорий гравитационного поля [5, 6] выдвигались также с целью преодоления известных трудностей общей теории относительности (ОТО), связанных с проблемой энергии гравитационного поля, наличием сингулярностей и др. Результативным оказалось и применение формализма твисторов к калибровочным и гравитационным полям в виде конструкции автодуальных решений уравнений Янга—Миллса и Эйнштейна—Гильберта ОТО, а также твисторная интерпретация неавтодуальных калибровочных полей [3, 4, 7, 8]. Поэтому естественно ожидать, что калибровочная трактовка позволит применить непосредственно в гравитации (уравнения Эйнштейна—Гильберта получаются как частный случай полевых уравнений GA_4-калибровочной теории гравитации) уже с успехом оправдавшие себя в изучении важных неавтодуальных полей типа Янга—Миллса перспективные твисторные методы.

Основная цель настоящей работы — показать, что, используя модели GA_4- и GL_5-гравитации (особенно важны результаты работы Попова — Дайхина [9]), можно построить инфинитезимальные расширения в голоморфном расслоенном пространстве над нуль-геодезической базой, в частности конструкцию Виттена—Айзенберга—Грина—Ясскина [7, 8], альтернативно, не обращаясь к супергравитации [4, 10].

2. **GA_4- и GL_5-калибровочные гравитации.** Пусть $(L(M), M, GL(4, R))$ — расслоение линейных реперов над базой M, $\dim M=4$, g — псевдориманова метрика на базе, а $\Omega(g)$ — псевдориманова связность на $L(M)$. Обозначим: d — оператор внешнего дифференцирования, δ — сопряженный с d оператор, и введем оператор $\Delta=H\circ d$, где H — оператор взятия горизонтальной части. Рассмотрим также расслоение аффинных реперов $(A(M), M, Af(4, R))$, где $Af(4, R)=$ $=GL(4, R)\cdot R^4$ — аффинная группа (знаком $\cdot$ обозначено полупрямое произведение). Псевдориманову связность с нулевым тензором

Риччи назовем эйнштейновской. Д. А. Попов и Л. И. Дайхин, отказавшись от гипотезы невырожденности метрики Киллинга для алгебры Ли $\mathscr{L}(G)$ калибровочной группы G, получили следующие результаты [9].

Теорема 1 (Попова—Дайхина). а) Псевдориманова связность является эйнштейновской тогда и только тогда, когда индуцированные ею картановские связность $\bar{\Omega}$ и кривизна $\bar{\mathscr{R}}$ удовлетворяют уравнению

$$\Delta\bar{\mathscr{R}}=0. \tag{1}$$

б) Для любого тензора энергии-импульса T_{ij} существует ток $\bar{\mathscr{J}}$ такой, что уравнения Эйнштейна—Гильберта $R_{ij}-(1/2)g_{ij}R=\varkappa T_{ij}$ эквивалентны уравнениям

$$\Delta\bar{\mathscr{R}}=\bar{\mathscr{J}}. \tag{2}$$

Назовем уравнения (1) и (2) уравнениями Попова—Дайхина.

Осуществим вложение $\alpha: GA_4 \subsetneq GL_5$ в матричном представлении групп и рассмотрим GL_5-калибровочную теорию гравитации с последующим ограничением на $\alpha(GA_4)\equiv\bar{G}A_4$. (Подробный обзор и критический анализ моделей GA_4- и GL_5-калибровочных теорий гравитации, см., напр., в [5, 6].) В настоящей работе, не вдаваясь в детали незавершенности трактовки гравитации с калибровочной точки зрения, рассмотрим уравнения Попова—Дайхина, «вложенные» в GL_5-теорию как удобное математическое представление, которое позволяет применить аппарат комплексной алгебраической геометрии и получить твисторную трактовку уравнений Эйнштейна—Гильберта.

Вариационные GL_5-уравнения поля имеют вид

$$D(*\mathscr{R})\equiv d(*\mathscr{R})+\Omega\wedge(*\mathscr{R})-(*\mathscr{R})\wedge\Omega=\mathscr{J}, \tag{3}$$

где Ω — 1-форма связности, $\mathscr{R}$ — 2-форма кривизны, $\mathscr{J}$ — 3-форма тока. Из (3) можно получить в частном случае уравнения Эйнштейна—Гильберта с космологическим членом, если рассмотреть псевдориманову базу M, считать неметричность и кручение равными нулю и выбрать для 5×5 матриц связности Ω, кривизны $\mathscr{R}$ и тока $\mathscr{J}$ GL_5-теории следующую параметризацию:

$$\Omega^э=\left[\begin{array}{c:c}\Gamma^э & \theta^э+\mathscr{D}\xi \\ \hdashline 0 & 0\end{array}\right],\ \mathscr{R}^э=\left[\begin{array}{c:c}R^э & R^э\xi \\ \hdashline 0 & 0\end{array}\right],\mathscr{J}^э=$$

$$=\left[\begin{array}{c:c}\mathscr{D}(*T^э) & \theta\wedge(*T^э)+\mathscr{D}(*T^э\xi) \\ \hdashline 0 & 0\end{array}\right],$$

где в заданной системе координат на карте базы

$$T_э=[\varkappa(T_i{}^a-(1/2)\theta_i{}^aT)+\Lambda\theta_i{}^a\,dx^i\otimes X_a,$$

X_a — базис алгебры Ли gl_4, $\Gamma^э$ — лоренцева связность на касательном расслоении $T(M)$, $R^э$ — кривизна лоренцевой связности, $\mathscr{D}$ — ковариантное дифференцирование; вектор $\xi\in R_4$ служит для задания в каждом аффинном пространстве $A_x{}^4$ выделенной точки o_x, стабилизатором которой является подгруппа $(GL_4)_{o_x}\subset GA_4$, θ — каноническая 1-форма, $\varkappa=8\pi G/c^4$, G — гравитационная постоянная, Λ — космологическая постоянная.

3. **Пространство нуль-геодезических и твисторы Ле Брюна** [11, 12].

Пусть $(\mathscr{CM}, g)$ — комплексное 4-мерное риманово многообразие, геодезически выпуклое, с конформной структурой. Тогда пространство $\mathscr{N}$ комплексных нуль-геодезических в $\mathscr{CM}$ — комплексное 5-мерное многообразие. Для нуль-геодезической $\gamma\subset\mathscr{CM}$ обозначим через Y касательное векторное поле к γ, т. е. $\Delta_Y Y=0$; тогда существует изоморфизм между касательными векторами в точке $\mathscr{N}$, соответствующими γ, и векторными полями Якоби J^a, удовлетворяющими уравнению девиации геодезических

$$\nabla^2{}_Y J^a = R^a{}_{bcd} J^c Y^b Y^d. \tag{4}$$

Условием того, что J^a связывает нуль-геодезические, является ограничение

$$Y_a \nabla_Y J^a = 0 \tag{5}$$

с соотношением эквивалентности $J^a \sim \mathfrak{J}^a$, если $J^a - \mathfrak{J}^a$ касателен к γ. Перейдем к спинорному разложению $Y^a \to Y^{AA'} = \omega^A \zeta^{A'}$, с условием $\nabla_Y \omega^A = 0$, и определим

$$\begin{bmatrix} \eta^A \\ \mu^{A'} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \zeta_{A'} & J^{AA'} \\ \omega_A & J^{AA'} \end{bmatrix},$$

где A, A' — спинорные индексы. Тогда (4) и (5) эквивалентны уравнениям

$$\nabla_Y^2 = \begin{bmatrix} \eta^A \\ \mu^{A'} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \Phi_B \omega^A & \widetilde{\Psi}_{B'} \omega^A \\ \Psi_B \zeta^{A'} & \Phi_{B'} \zeta^{A'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta^B \\ \mu^{B'} \end{bmatrix}; \quad \nabla_Y \begin{bmatrix} \omega_A \eta^A \\ \zeta_{A'} \mu^{A'} \end{bmatrix} = 0, \tag{6}$$

где $\Phi_A := \Phi_{ABA'B'} \omega^B \zeta^{A'} \zeta^{B'}$, $\Psi_A := \Psi_{ABCD} \omega^B \omega^C \omega^D$, $\widetilde{\Psi}_{A'} := \widetilde{\Psi}_{A'B'C'D'} \zeta^{B'} \zeta^{C'} \zeta^{D'}$, $\Phi_{A'} := \varphi_{ABA'B'} \omega^A \omega^B \zeta^{B'}$. Выражения для спин-тензоров см. в [13]. Назовем проективный твистор $Z^\alpha = (\eta^A, \zeta_{A'})$ и проективный дуальный твистор $W_\alpha = (\omega_A, \mu^{A'})$ твисторами Ле Брюна, если они удовлетворяют (6), а пару (Z^α, W_α) — битвистором Ле Брюна, если выполняется соотношение инцидентности: $Z^\alpha W_\alpha = \omega_A \eta^A - \zeta_{A'} \mu^{A'} = 0$.

4. **Голоморфные расслоения и уравнения гравитационного поля.** Рассмотрим комплексификацию модели GA_4-гравитации — голоморфное расслоение аффинных реперов $(A(\mathscr{CM}), \mathscr{CM}, Af(4, C))$ с вложением $\alpha : GA(4, C) \rightarrow GL(5, C)$ над 4-мерной комплексной римановой базой $(\mathscr{CM}, g)$ с конформной структурой битвисторов Ле Брюна. Это позволит обобщить все результаты [7, 8] (подробные вычисления см. [3, с. 180—206]) на случай искривленной базы и получить «твисторное представление» для неавтодуальных уравнений Попова—Дайхина (1), в частном случае содержащие вещественные вакуумные уравнения Эйнштейна $R_{ij}=0$.

Пусть S — открытая область в $\mathscr{EM}$, $L(S)$ — пространство нуль-геодезических, пересекающих S. Аналогично, $L(r)$ — пространство нуль-геодезических, содержащих точку $r\in\mathscr{CM}$. Потребуем, чтобы $L(r)$ было компактным комплексным многообразием; в таком случае можно использовать принципиальный для всех твисторных конструкций результат, что любая голоморфная функция на компактном комплексном многообразии должна быть постоянной. Введем следующие обозначения: 1) $\mathscr{CM}$ с локальными координатами $r^a = r^{AA'}$; 2) $\mathscr{CM}\times\mathscr{CM}$ с координатами на карте (p^a, q^a) или (r^a, s^a), где p^a и q^a — координаты на каждом множителе, $r^a = (p^a+q^a)/\sqrt{2}$ и $s^a = (p^a - q^a)/\sqrt{2}$; 3) P_α с координатами — проективными твисторами Ле Брюна $Z^{\alpha}=(\eta^{A}, \zeta_{A'})$; 4) P_{β} с координатами — проективными дуальными твисторами Ле Брюна $\mathbb{W}_{\beta}=(\omega_{A}, \mu^{A'})$ 5) $P_{\alpha}\times P_{\beta}:(Z^{\alpha}, \mathbb{W}_{\beta})$; 6) L: нуль-геодезические битвисторы Ле Брюна $(Z^{\alpha}, \mathbb{W}_{\alpha})$, где $Z^{\alpha}\mathbb{W}_{\alpha}=0$; 7) B_{α}: флаговое пространство (q^{a}, ω_{A}); 8) $B_{\alpha}\times B_{\beta}$: произведение флаговых пространств — $(p^{a}, \zeta_{A'}, q^{a}, \omega_{A})$; 9) $B_{L}:(r^{a}, \zeta_{A'}, \omega_{A})$. Все твисторные компоненты рассматриваются с точностью до комплексного множителя. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} \mathscr{CM} & \longleftarrow & B_L & \xrightarrow{\Pi_L} & L \\ \Delta\downarrow & & \downarrow\Delta_B & & \downarrow\Lambda \\ \mathscr{CM}\times\mathscr{CM} & \longleftarrow & B_\alpha\times B_\beta & \longrightarrow & P_\alpha\times P_\beta \end{array} \tag{7}$$

и будем использовать функции перехода для расслоений над $L(S)$, $P_{\alpha}(S)\times P_{\beta}(S)$, $B_{L}(S)$ и $B_{\alpha}(S)\times B_{\beta}(S)$ (координатные представления отражений см. ниже). Пусть $\{\mathbb{W}^{[m]}$ — такое конечное покрытие $P_{\alpha}(S)\times\times P_{\beta}(S)$, что любое расслоение над $P_{\alpha}(S)\times P_{\beta}(S)$ может быть параметризовано своими функциями перехода, $\tilde{g}^{[mn]}$, на $\mathbb{W}^{[m]}\cap\mathbb{W}^{[n]}$. Тогда определим $U^{[m]}:=V^{[m]}\cap L\subset L(S)$, $V^{[m]}:=\Pi_{L}^{-1}(U^{[m]})\subset B_{L}(S)$ и $X^{[m]}:==\Pi^{-1}(\mathbb{W}^{[m]})\subset B_{\alpha}(S)\times B_{\beta}(S)$. Из коммутативности диаграммы (7) имеем $V^{[m]}=X^{[m]}\cap B_{L}$. Введем на $P_{\alpha}(S)\times P_{\beta}(S)$ координаты, удобные для рассмотрения $L(S)\subset P_{\alpha}(S)\times P_{\beta}(S)$: в каждой окрестности $\mathbb{W}^{[m]}$ мы используем координаты (δ, x^{Σ}), $\Sigma=1, \ldots, 5$, где $U^{[m]}$ — поверхность $\delta=0$ и (x^{Σ}) — координаты на $U^{[m]}$.

Параметры и координаты отображений

$$\Pi_{L}:B_{L}\to L:(r^{AA'}, \zeta_{A'}, \omega_{A})\to\left(\frac{i}{\sqrt{2}}r^{AA'}\zeta_{A'}, \zeta_{A'}, \omega_{A}, -\frac{i}{\sqrt{2}}r^{AA'}\omega_{A}\right);$$

$$\Pi_{\alpha}:B_{\alpha}\to P_{\alpha}:(p^{AA'}, \zeta_{A'})\to(ip^{AA'}\zeta_{A'}, \zeta_{A'});$$

$$\Pi_{\beta}:B_{\beta}\to P_{\beta}:(q^{AA'}, \omega_{A})\to(\omega_{A}, -iq^{AA'}\omega_{A});$$

$$\Pi:B_{\alpha}\times B_{\beta}\to P_{\alpha}\times P_{\beta}:(p^{AA'}, \zeta_{A'}, q^{AA'}, \omega_{A})\to(ip^{AA'}\zeta_{A'}, \zeta_{A'}, \omega_{A}, -iq^{AA'}\omega_{A});$$

$$\Delta:\mathscr{CM}\to\mathscr{CM}\times\mathscr{CM}:(r^{a})\to\left(r^{a}/\sqrt{2}, r^{a}/\sqrt{2}\right);$$

$$\Delta_{B}:B_{L}\to B_{\alpha}\times B_{B}:(r^{a}, \zeta_{A'}, \omega_{A})\to\left(r^{a}/\sqrt{2}, \zeta_{A'}, r^{a}/\sqrt{2}, \omega_{A}\right);$$

$$\Lambda:L\to P_{\alpha}\times P_{\beta}:(\eta^{A}, \zeta_{A'}, \omega_{A}, \mu^{A'})\to(\eta^{A}, \zeta_{A'}, \omega_{A}, \mu^{A'});$$

$$\Lambda:U^{[m]}\to\mathbb{W}^{[m]}:(x^{\Sigma})\to(x^{\Sigma}, \delta).$$

Пусть группа $G=A(4; C)\subsetneq GL(5; C)$ и рассмотрим $E_{S}=Af(S)$ — голоморфное расслоение аффинных реперов над S со структурной группой G. Сформулируем обобщение на искривленный случай теоремы соответствия из [3, с. 180—206].

Т е о р е м а 2. Существует 1—1 соответствие между

а) голоморфными главными G-расслоениями E_{S} над S с голоморфными связностью Ω и кривизной $\mathscr{R}$, для которых индуцированные картановские связность $\bar{\Omega}$ и кривизна $\bar{\mathscr{R}}$ удовлетворяют уравнению Попова—Дайхина (1);

б) голоморфными главными G-расслоениями $E_{L(S)}$ над $L(S)$, которые имеют тривиальные ограничения $E_{L(r)}$ над $L(r)$ для всех $r\in S$.

Доказательство аналогично [3, с. 180—206], только в отличие от плоского случая при отображениях и при тривиализации 1-формы связности Ω_L на L-открытую область в пространстве нуль-геодезических используются твисторы Ле Брюна.

5. **Калибровочные уравнения первого порядка и инфинитезимальные расширения в окрестности нуль-геодезической.** Сформулируем необходимые и достаточные условия для $E_{L(S)}$, при которых GL_5-гравитационное поле удовлетворяет уравнениям Попова—Дайхина без источника.

Т е о р е м а 3. Пусть расслоение $E_{L(S)}$ над $L(S)$ соответствует GL_S-гравитационному полю Ω^L и $\mathcal{R}^L$ в расслоении E_S над S. Обозначим через $\tilde{g}^{[mn]}$ функции перехода для $E_{L(S)}$, согласованные с покрытием $U^{[m]}$ над базой $L(S)$. Тогда $D^L(*\mathcal{R}^L)=0$, если существует G-значная функция $g^{[mn]}$ в некоторой окрестности $U^{[m]}\cap U^{[n]}$ внутри каждого пересечения $W^{[m]}\cap W^{[n]}\subset P_\alpha\times P_\beta$ такая, что:

а) $\tilde{g}^{[mn]}|_L=\tilde{g}_L^{[mn]}$ и б) $\tilde{g}^{[mn]}\tilde{g}^{[nk]}=\tilde{g}^{[mk]}+O(\delta^4)$.

Доказательство теоремы следует из следующей цепочки из пяти эквивалентных утверждений:

[I] $D^L(*\mathcal{R}^L)=0$.

[II] Существуют 1-формы связности $\mathbf{\Omega}=\mathcal{A}_a dr^a+\mathcal{B}_a ds^a$ на $E_{S\times S}$ и $\mathbf{\Gamma}^a{}_b=A^a{}_{bc}dr^c+B^a{}_{bc}ds^c$ на $S\times S$ такие, что а) $\Delta^*(\mathbf{\Omega})=\Omega^L$ и $\Delta^*(\mathbf{\Gamma}^a{}_b)=(\Gamma^L)^a{}_b$ или эквивалентно

$$\mathcal{A}_a|_{\Delta(S)}=\mathcal{A}_a^L;\quad A^a_{bc}|_{\Delta(S)}=(A^L)^a_{bc};\tag{8}$$

б) если определить $D_a:=\partial/\partial r^a+\mathcal{A}_a$, $\nabla_a:=\partial/\partial s^a+\mathcal{B}_a$, где $\partial/\partial r^a$, $\partial/\partial s^a$ — производные на базе, то калибровочное поле $\mathbf{\Omega}$ удовлетворяет уравнениям

$$[\nabla_a,\nabla_b]=[D_a,D_b]+O(s^2);\quad [D_a,\nabla_b]=i*[D_a,D_b]+O(s^2).\tag{9}$$

[III] Существуют связности $\mathbf{\Omega}=\mathcal{P}_a dp^a+\mathcal{Q}_a dq^a$ на $E_{S\times S}$ и $\mathbf{\Gamma}^a{}_b=P^a{}_{bc}dp^c+Q^a{}_{bc}dq^c$ на $S\times S$ такие, что а) $\Delta^*(\mathbf{\Omega})=\Omega^L$, $\Delta^*(\mathbf{\Gamma}^a{}_b)=(\Gamma^L)^a{}_b$ или эквивалентно $\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathcal{P}_a+\mathcal{Q}_a)|_{\Delta(S)}=\mathcal{A}_a^L$; $\frac{1}{\sqrt{2}}(P^a_{bc}+Q^a_{bc})|_{\Delta(S)}=(A^L)^a_{bc}$;

б) если определить $d_a:=\delta/\delta p^a+\mathcal{P}_a$, $\delta_a:=\delta/\delta q^a+\mathcal{Q}_a$, тогда выполняются уравнения $[d_{A\zeta},d_{B\zeta}]=O(s^2)$; $[\delta_{\omega A'},\delta_{\omega B'}]=O(s^2)$; $[d_a,\delta_b]=O(s^2)$ (осуществлен переход к спинорным координатам $p^a\to p^{AA'}$, $q^a\to q^{AA'}$ и по определению $d_{A\zeta}:=\zeta^{A'}d_{AA'}$, $\delta_{\omega A'}=\omega^A\delta_{AA'}$).

[IV] Существует G-значная функция $g^{[m]}$ на некоторой окрестности $V^{[m]}$, заданная внутри каждого покрытия $X^{[m]}\subset B_\alpha\times B_\beta$, и существует G-значная функция $g^{[mn]}$ в некоторой окрестности $V^{[m]}\cap V^{[n]}$, заданная внутри каждого пересечения $X^{[m]}X\cap^{[n]}$, такая, что

а) $g^{[m]}|_{B_L}=g_L^{[m]}$; б) $g^{[mn]}=g^{[m]}(g^{[n]})^{-1}+O(s^2)$;

в) $\frac{\partial}{\partial p^{A\zeta}}g^{[mn]}=0$, $\frac{\partial}{\partial q^{\omega A'}}g^{[mn]}=0$, где ле-брюновские производные $\partial/\partial p^{A\zeta}$, $\partial/\partial q^{\omega A}$ выражаются через производные на базе:

$$\frac{\partial}{\partial p^{A\zeta}}:=\zeta^{A'}\frac{\partial}{\partial p^{AA'}},\quad \frac{\partial}{\partial q^{\omega A}}:=\omega^A\frac{\partial}{\partial q^{AA'}}.$$

[V] Существует G-значная функция $\tilde{g}^{[mn]}$ в некоторой окрестности $U^{[m]}\cap U^{[n]}$, заданная внутри каждого пересечения $W^{[m]}\cap W^{[n]}\subset P_\alpha\times P_\beta$, такая, что а) $\tilde{g}^{[mn]}|_L=\tilde{g}^{[mn]}{}_L$ и б) $\tilde{g}^{[mn]}\tilde{g}^{[nk]}=g^{[mk]}+O(\delta^4)$.

Переход: [I] $\leftrightarrow$ [II]. $\leftarrow$) Предположим, что существует связность $\mathbf{\Omega}$, удовлетворяющая условиям II, и рассмотрим разложения

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_a &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{A}_{akb_1\ldots b_k} s^{b_1} \ldots s^{b_k},\\
\mathcal{B}_a &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{B}_{akb_1\ldots b_k} s^{b_1} \ldots s^{b_k};\\
A^a_{bc} &= \sum_{k=0}^{\infty} A^a_{bckb_1\ldots b_k} s^{b_1} \ldots s^{b_k},\\
B^a_{bc} &= \sum_{k=0}^{\infty} B^a_{bckb_1\ldots b_k} s^{b_1} \ldots s^{b_k}.
\end{aligned} \tag{10}$$

Тогда (8) требует, чтобы

$$\mathcal{A}_{a0} = (\Omega^L)_a \quad \text{и} \quad A^a{}_{bc0} = (\Gamma^L)^a{}_{bc}. \tag{11}$$

Можно выбрать калибровку, совместимую с (11), при которой симметричные части $\mathcal{B}_a$ и $B^a{}_{bc}$ равны нулю, т. е. $\mathcal{B}_{(\alpha kb_1\ldots b_k)} = 0$ и $B^a_{b(ckb_1\ldots b_k)} = 0$, в частности

$$\mathcal{B}_{a0} = 0; \qquad B^a{}_{bc0} = 0. \tag{12}$$

Используя (10)—(12), можно получить разложения по степеням s^a для $[D_a, D_b]$, $[\nabla_a, \nabla_b]$ и $[D_a, \nabla_b]$. Калибровочные уравнения 1-го порядка (9) обеспечивают выполнение уравнения $D^L(*\mathcal{R}^L) = 0$, если выбрать следующие коэффициенты разложений (10):

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}_{a1b_1} = i\,(*\mathcal{R}^L)_{b_1a}, \quad A^\alpha_{bc1b_1} = i\,(*\,((R^L)^a_b))_{b_1c},\\
&\mathcal{B}_{a1b_1} = \frac{1}{2}\,(\mathcal{R}^L)_{b_1a}, \quad B^\alpha_{bc1b_1} = \frac{1}{2}\,(R^L)^\alpha_{bb_1c},\\
&\mathcal{A}_{a2b_1b_2} = \frac{1}{4}\,[D^L_{b_1}(\mathcal{R}^L_{b_2a}) + D^L_{b_2}(\mathcal{R}^L_{b_1a})],\\
&A^a_{bc2b_1b_2} = \frac{1}{4}\,[\bar{D}^L_{b_1}(R^L)^a_{bb_2c} + \bar{D}^L_{b_2}(R^L)^a_{bb_1c}],\\
&\mathcal{B}_{a2b_1b_2} = \frac{i}{6}\,[D^L_{b_1}(*\,\mathcal{R}^L)_{b_2a} + D^L_{b_2}(*\,\mathcal{R}^L)_{b_1a}],\\
&B^a_{bc2b_1b_2} = \frac{i}{6}\,[\bar{D}^L_{b_1}((*R^L)^a_b)_{b_2c} + \bar{D}^L_{b_2}((*R^L)^a_b)_{b_1c}],
\end{aligned} \tag{13}$$

где, например, $(*\,(R^L)^a_b)_{b_1a} = \sqrt{-g}\,\varepsilon_{b_1amn}(R^L)^a{}_b{}^{mn}$.

$\rightarrow$) В обратном порядке предполагаем, что Ω^L и $\mathcal{R}^L$ удовлетворяют уравнению $D^L(*\mathcal{R}^L) = 0$. Тогда, рассматривая связности в тотальном пространстве $E_{S\times S}$ и на базе $S\times S$ как квадратичные полиномы по s^a (в указанной выше калибровке (12) для выбранной глобальной тривиализации) с коэффициентами (11)—(13), мы гарантируем выполнение соотношений (9). Отметим, что искривленность базы ограничивает выбор калибровок при построении разложений в ряд по степеням s^a. Переходы: [II] $\leftrightarrow$ [III] $\leftrightarrow \ldots \leftrightarrow$ [V] доказываются аналогично [I] $\leftrightarrow$

$\leftrightarrow$ [11]. Соотношения работы [3, с. 180—206] обобщаются на случай псевдоримановой базы с учетом того, что частные производные от G-значных функций заменяются на ковариантные на базе, а твисторы Ле Брюна находятся из уравнений (6).

6. **Заключение.** Мы перевели задачу нахождения решения уравнений Попова—Дайхина без источника к задаче нахождения расслоения $E_{L(S)}$ над $L(S)$ (искривление $L(S)$ задается твисторами Ле Брюна). В $E_{L(S)}$ существуют инфинитезимальные расширения 3-го порядка в окрестности нуль-геодезической, принадлежащие $P_\alpha(S)\times P_\beta(S)$.

Конечно, задача твисторной трактовки гравитации еще далека от решения. Необходимо получить трактовку тока Попова—Дайхина (аналогично твисторной интерпретации тока Янга—Миллса [14—16] и получить преобразование уравнения Попова – Дайхина с источником в неоднородные уравнения Коши—Римана на пространстве твисторов. Отметим, что в разложениях в ряд (10) можно учитывать и кручение на базе (о роли кручения в гравитации см. [5, 6]). Программа твисторной интерпретации системы полевых уравнений гравитации с кручением Янга—Миллса—Дирака—Хиггса (обобщение [15, 16]) весьма актуальна, и, по-видимому, ее реализация будет существенным вкладом в построение единой теории фундаментальных полей и взаимодействий.

Автор благодарен Ю. Н. Обухову за поддержку и полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Penrose R. // J. Math. Phys. 1967. 8. P. 345—366. [2] Твисторы и калибровочные поля / Под ред. В. В. Жаринова. М., 1983. [3] Complex manifold thechnique in theoretical physics / Ed. D. E. Lerner, P. D. Sommers. Research Notes in Math., 32. London.: Pitman, 1979. [4] Манин Ю. И. Калибровочные поля и комплексная геометрия. М., 1984. [5] Пономарев В. Н., Барвинский А. О., Обухов Ю. Н. Геометродинамические методы и калибровочный подход в теории гравитации. М., 1984. [6] Иваненко Д. Д., Пронин П. И., Сарданашвили Г. А. Калибровочная теория гравитации. М., 1985. [7] Witten E.//Phys. Lett. 1978. B77. P. 394—398. [8] Isenberg J., Yasskin Ph. B., Green P. S. // Phys. Lett. 1978. B78. P. 464—468. [9] Попов Д. А., Дайхин Л. И. // ДАН СССР. 1975. 225. С. 790—793. [10] Манин Ю. И., Пенков И. Б. // Функциональный анализ и его приложения. 1982. 16. С. 78—79. [11] Le Brun C. R. // Class. Quantum Grav. 1985. 2. P. 555—563. [12] Le Brun C. R. // Lett. Math. Phys. 1982. 6. P. 345—354. [13] Пенроуз Р. Структура пространства-времени. М., 1972. [14] Современные проблемы математики / Под ред. Р. В. Гамкрелидзе. М., 1981. Т. 17. [15] Манин Ю. И., Хенкин Г. М. // Ядерная физика, 1982. 35. С. 1610—1626. [16] Хенкин Г. М. // ДАН СССР. 1982. 265. С. 1081—1085.

Поступила в редакцию
30.04.86