РАДИОФИЗИКА

УДК 538.56:519.25

О ВЛИЯНИИ ШУМА НА ПЕРЕХОДЫ К ХАОСУ ЧЕРЕЗ ПЕРЕМЕЖАЕМОСТЬ

П. С. Ланда

(кафедра общей физики и волновых процессов)

Рассмотрен переход к хаосу через перемежаемость, возникающий при слиянии устойчивого предельного цикла с двумя неустойчивыми, в случае, когда система может быть описана одномерным точечным отображением. Показано, что наличие внешнего шума дестабилизирует движение системы, увеличивая ляпуновский показатель.

Известно [1, 2], что переход к хаосу через перемежаемость происходит тогда, когда устойчивый режим сливается с неустойчивым и исчезает, а на его месте в фазовом пространстве системы возникает хаотический аттрактор. Вблизи такого перехода поведение системы в течение длительных промежутков времени является почти регулярным. Эти участки регулярного поведения («ламинарные» фазы) перемежаются короткими нерегулярными всплесками («турбулентные» фазы). В простейшем случае, когда поведение системы описывается одномерным точечным отображением, зависящим от одного параметра, среднюю длительность «ламинарной» фазы τ вблизи точки перехода удается рассчитать либо методом ренормгруппы [3—5], либо путем замены точечного отображения соответствующим дифференциальным уравнением [6—9].

Для определения характера движения после перехода основную роль играет ляпуновский показатель. Расчет ляпуновского показателя λ проведен в работах [7, 9]. Очевидно, что на величины τ и λ существенное влияние должен оказывать внешний шум, действующий на систему. Это влияние частично рассмотрено в работах [3—9], где показано, что внешний шум всегда уменьшает среднюю длительность ламинарной фазы. Что же касается значения ляпуновского показателя, то, как следует из работы [9] и представленных ниже результатов, шум может его как уменьшать (т. е. стабилизировать движение системы), так и увеличивать (дестабилизировать). Отметим, что аналогичные эффекты наблюдаются и при переходах к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода [10, 11].

В большинстве имеющихся работ [1—7, 9] переход через перемежаемость рассматривается на примере системы, описываемой одномерным точечным отображением вида

$$\bar{x}=\varepsilon+x+ax^z+g\xi, \qquad (1)$$

где ε — бифуркационный параметр, z — четное число, $g\xi$ — внешний шум, $\langle\xi\rangle=0$, $\langle\xi_n\xi_m\rangle=\delta_{mn}$, δ_{mn} — символ Кронекера. В [9] показано, что для таких систем шум при определенном условии оказывает стабилизирующее влияние на движение, поскольку забрасывает отображающую точку на сжимающий участок отображения.

В настоящей работе, следуя [8], рассмотрим другой тип перехода к хаосу через перемежаемость, когда в отображении отсутствуют сжимающие участки и оно имеет вид, показанный на рис. 1. В момент перехода устойчивая неподвижная точка M сливается с двумя неустойчивыми точками M' и M'' и становится неустойчивой. За счет участков отображения II и II′ отображающая точка возвращается в область вблизи точки M. При небольшом x_0 участок I отображения можно аппроксимировать следующей формулой:

$$\bar{x}=(1+\varepsilon+ax^z)x, \tag{2}$$

где z — четное число (в наиболее типичном случае $z=2$). Момент перехода соответствует $\varepsilon=0$. При достаточно малых ε отображающая точка длительное время будет находиться вблизи точки M, т. е. движение будет близким к периодическому («ламинарная» фаза). Участ-

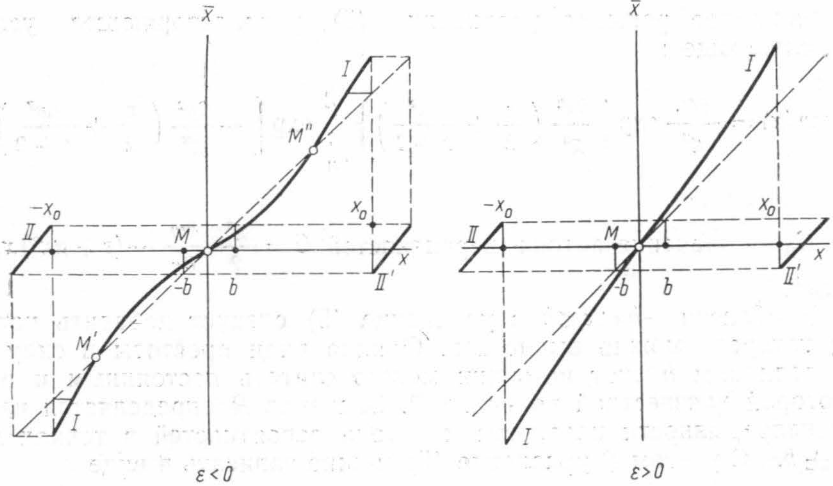

Рис. 1. Вид точечного отображения вблизи перехода к хаосу через перемежаемость

ки такого движения будут перемежаться короткими «турбулентными» всплесками, соответствующими переходам в области отображения II, II′ и обратно.

С учетом внешнего шума отображение (2) можно записать в виде

$$\bar{x}=(1+\varepsilon+ax^z)x+g\xi, \tag{3}$$

где $\langle\xi\rangle=0$, $\langle\xi_n\xi_m\rangle=\delta_{nm}$. При $|\varepsilon|$, g, $ax_0^z\ll 1$ уравнение (3) может быть заменено дифференциальным уравнением

$$dx/dt=(\varepsilon+ax^z)x+g\xi(t), \tag{4}$$

где $\langle\xi(t)\rangle=0$, $\langle\xi(t)\xi(t')\rangle=\delta(t-t')$.

Рассмотрим для простоты случай полностью симметричного отображения, как это показано на рис. 1, и будем считать, что участки обмена отображающих точек между областями I, II и II′ малы. Соответствующие условия малости имеют вид $\varepsilon+ax_0^z$, $k(\varepsilon+ax_0^z)\ll 1$, где k — тангенс угла наклона участков отображения II и II′. При этом участками обмена вблизи точек $\mp x_0$ в силу их малости можно просто пренебречь, тогда как участок $[-b, b]$ (см. рис. 1) вблизи точки $x=0$ необходимо учитывать ввиду нахождения в нем неподвижной точки

M^*. (При стремлении b к нулю распределение вероятностей в точке $x=0$ получает особенность.)

В областях $b \leqslant |x| \leqslant x_0$ уравнению (4) можно сопоставить уравнение Фоккера—Планка без источника:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[(\varepsilon + ax^z)\,xw\right] + \frac{g^2}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \tag{5}$$

Поскольку все точки, достигшие границы x_0, уходят из рассматриваемого интервала, то

$$w(\pm x_0) = 0. \tag{6}$$

Стационарное решение уравнения (5), удовлетворяющее условиям (6), следующее:

$$w(x) = \frac{2G_0}{g^2}\exp\left[\frac{2x^2}{g^2}\left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{ax^z}{z+2}\right)\right]\int\limits_{|x|}^{x_0}\exp\left[-\frac{2y^2}{g^2}\left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{ay^z}{z+2}\right)\right]dy, \tag{7}$$

где G_0 — значение потока вероятностей $G = \frac{g^2}{2}\frac{\partial w}{\partial x} - (\varepsilon + ax^z)\,xw$ при $|x| \geqslant b$.

В области $-b \leqslant x \leqslant b$ в уравнение (5) следует добавить источник, вид которого можно вычислить. Однако ради простоты в силу малости величины b этот источник можно считать постоянным и равным некоторой неизвестной величине R. Значение R определяется из условий непрерывности плотности и потока вероятностей в точках $x=0$ и $x = \pm b$. С учетом R уравнение (5) можно записать в виде

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial G}{\partial x} + R. \tag{8}$$

Из условия $\partial w/\partial x\,|_{x=0} = 0$, вытекающего из симметрии плотности вероятностей при положительных и отрицательных значениях x, и выражения для потока вероятностей G в стационарном случае находим

$$G(x) = Rx \qquad \text{при } -b \leqslant x \leqslant b. \tag{9}$$

Полагая в (9) $x=b$, получаем связь между G_0 и R:

$$R = G_0/b. \tag{10}$$

С учетом (10) стационарное решение уравнения (8) в области $|x| \leqslant b$, удовлетворяющее условиям непрерывности в точке $x=b$, имеет вид

$$w(x) = \frac{2G_0}{g^2}\exp\left[\frac{2x^2}{g^2}\left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{ax^z}{z+2}\right)\right]\left\{\int\limits_{b}^{x_0}\exp\left[-\frac{2y^2}{g^2}\left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{ay^z}{z+2}\right)\right]dy + \frac{1}{b}\int\limits_{x}^{b} y\exp\left[-\frac{2y^2}{g^2}\left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{ay^z}{z+2}\right)\right]dy\right\}. \tag{11}$$

---

* Величина b определяется участками отображения II и II′. Ее геометрический смысл виден из рис. 1.

Из условия нормировки находим G_0^{-1}:

$$G_0^{-1}=\frac{4}{g^2}\left\{\int\limits_0^{x_0}\exp\left[\frac{2x^2}{g^2}\left(\frac{\varepsilon}{2}+\frac{ax^z}{z+2}\right)\right]\int\limits_x^{x_0}\exp\left[-\frac{2y^2}{g^2}\left(\frac{\varepsilon}{2}+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{ay^z}{z+2}\right)\right]dydx+\frac{1}{b}\int\limits_0^b\exp\left[\frac{2x^2}{g^2}\left(\frac{\varepsilon}{2}+\frac{ax^z}{z+2}\right)\right]\times$$

$$\left.\times\int\limits_x^b(y-b)\exp\left[-\frac{2y^2}{g^2}\left(\frac{\varepsilon}{2}+\frac{ay^z}{z+2}\right)\right]dydx\right\}. \qquad (12)$$

В предельном случае $g=0$ непосредственно из уравнений (5) и (8) имеем

$$w(x)=\begin{cases} G_0/[(\varepsilon+ax^z)|x|] & \text{при } b\leqslant|x|\leqslant x_0,\\ G_0/[(\varepsilon+ax^z)b] & \text{при } 0\leqslant|x|\leqslant b,\end{cases} \qquad (13)$$

где

$$G_0^{-1}=\frac{2}{\varepsilon}\left[\ln\frac{x_0}{b}-\frac{1}{z}\ln\frac{\varepsilon+ax_0^z}{\varepsilon+ab^z}+\frac{1}{b}\left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^{1/z}I_z\right],$$

$$I_z=\int\limits_0^{b(a/\varepsilon)^{1/z}}dy/(1+y^z). \qquad (14)$$

При $z=2$ $\quad I_2=\operatorname{arctg}\left(\sqrt{a/\varepsilon}\,b\right)$, $\quad$ при $z=4$

$$I_4=\frac{1}{4\sqrt{2}}\left[\ln\frac{1+\sqrt{2}\,b\,(a/\varepsilon)^{1/4}+b^2\sqrt{a/\varepsilon}}{1-\sqrt{2}\,b\,(a/\varepsilon)^{1/4}+b^2\sqrt{a/\varepsilon}}+2\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2}\,b\,(a/\varepsilon)^{1/4}}{1-b^2\sqrt{a/\varepsilon}}\right].$$

В предельном случае малых ε $\quad I_2\to\pi/2$, $I_4\to\sqrt{2}\pi/4$.

Графики функции $w(x)$ при различных значениях параметров приведены на рис. 2. Как следует из результатов численного счета *, при $g^2\geqslant g_c^2(z)$, где $g_c^2\sim10^{-7}$ для $z=2$ и 10^{-8} для $z=4$, распределение вероятностей практически перестает зависеть от g^2. Кроме того, при $g^2\geqslant10^{-7}$ оно почти одинаково для $z=2$ и $z=4$.

В силу сделанного выше предположения о малости величины b по сравнению с x_0, для вычисления средней длительности ламинарной фазы можно считать, что поток вероятности постоянен и равен G_0. Тогда с учетом того, что отображающая точка находится в области $x>0$ с вероятностью 1/2, по аналогии с [9] можно записать

$$\tau=G_0^{-1}/2. \qquad (15)$$

При $g^2=0$ и достаточно малых ε из (15) и (14) получаем

$$\tau=I_z\left(ba^{1/z}\varepsilon^{(z-1)/z}\right). \qquad (16)$$

Отсюда видно, что при малых ε величина $\tau\sim\varepsilon^{-(1-1/z)}$. В частности, при $z=2$ $\quad\tau\sim\varepsilon^{-1/2}$, что совпадает с результатами работы [8].

---

* Здесь и ниже приводятся результаты численного счета, полученные Т. С. Ландой.

Оценим зависимость τ от g^2 в предельном случае $\varepsilon=0$. Полагая в (12) $u=(2a/(z+2)g^2)^{1/(z+2)}x$, получим

$$\tau=2\left(\frac{z+2}{2a}\right)^{2/(z+2)} g^{-2z/(z+2)}B, \tag{17}$$

где

$$B=\int_0^{u_0}\exp(u^{z+2})\int_u^{u_0}\exp(-v^{z+2})\,dvdu+\frac{1}{b_0}\int_0^{b_0}\exp(u^{z+2})\int_u^{b_0}(v-b_0)\times$$
$$\times\exp(-v^{z+2})\,dvdu,$$

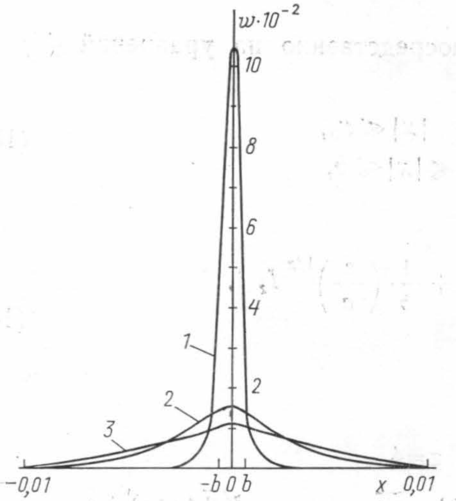

Рис. 2. Зависимость $w(x)$ при $a=30$, $x_0=0{,}01$, $\varepsilon=10^{-5}$, $z=2$, $k=20$, $b=(k/2)(\varepsilon+ax_0^z)x_0\approx 3\cdot 10^{-4}$: $g^2=0$ (*1*), 10^{-8} (*2*) и 10^{-7} (*3*)

$$u_0=\left(\frac{2a}{(z+2)g^2}\right)^{1/(z+2)}x_0,\ b_0=$$
$$=\left(\frac{2a}{(z+2)g^2}\right)^{1/(z+2)}b.$$

При $g^2\ll ab^{z+2}$ можно положить $u_0=\infty$ и $b_0=\infty$. Тогда

$$B\approx\frac{1}{b_0}\int_0^{\infty}\exp(u^{z+2})\int_u^{\infty}v\exp\times$$
$$\times(-v^{z+2})\,dvdu\sim g^{2/(z+2)}.$$

Следовательно, $\tau\sim g^{-2(z-1)/(z+2)}$. Эта предельная зависимость τ от g^2 при $\varepsilon=0$, $z=2$ также совпадает с результатами работы [8], хотя последние при учете шума получены не вполне корректно. Численные расчеты, проведенные по формулам (12), (15) при $a=30$, $b=3\cdot 10^{-4}$, $x_0=0{,}01$ показали, что зависимость τ от g^2 при $g^2\geqslant 10^{-8}$ практически не зависит от ε, а при $g^2\geqslant 10^{-6}$ – и от z. Ее вид продемонстрирован на рис. 3.

Величину ляпуновского показателя для рассматриваемого отображения можно вычислить по формуле, аналогичной приведенной в работе [9]:

$$\lambda=2\int_0^{x_0}w(x)\ln(1+\varepsilon+a(z+1)x^z)\,dx+\frac{1}{\tau}\ln|k|. \tag{18}$$

При $g=0$, $\varepsilon+a(z+1)x_0^z\ll 1$ с учетом (13), (15) получаем

$$\lambda=\frac{1}{\tau}\left[1+z+\ln\frac{x_0(\varepsilon+ax_0^z)}{b(\varepsilon+ab^z)}-\frac{z}{b}\left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^{1/z}I_z+\ln|k|\right]. \tag{19}$$

При достаточно малых ε, как следует из (19) и (16), величина λ с ростом ε нарастает пропорционально $\varepsilon^{(1-1/z)}$. Зависимости λ от ε при различных значениях g^2 и от g^2 при $\varepsilon=0$ показаны на рис. 4. Еще раз отметим, что в отличие от случая, рассмотренного в работе [9], внешний шум дестабилизирует поведение системы, существенно увеличивая ляпуновский показатель. Это отличие связано с тем, что при $\varepsilon>0$ отображение в области I не имеет сжимающих участков, а при $\varepsilon<0$ шум

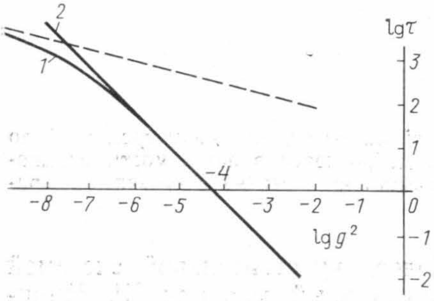

Рис. 3. Зависимость $\lg\tau$ от $\lg g^2$ при $a=30$, $x_0=0{,}01$, $b=3\cdot10^{-4}$: $z=2$ (*1*), 4 (*2*); штриховая линия — асимптотическая зависимость $\lg\tau$ от $\lg g^2$ при $\varepsilon=0$

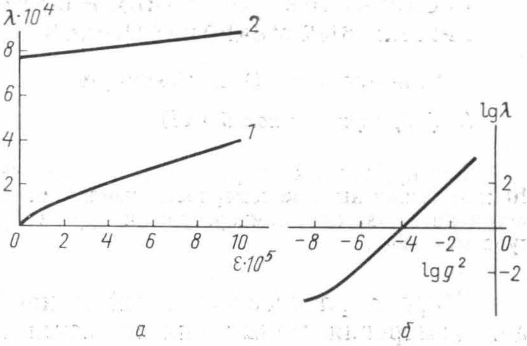

Рис. 4. Зависимость λ от ε при $z=2$, $g^2=0$ (*1*), 10^{-8} (*2*) — *а*; зависимость $\lg\lambda$ от $\lg g^2$ при $\varepsilon=0$, $z=2$ — *б*

забрасывает отображающую точку на растягивающие участки отображения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Manneville P., Pomeau Y. // Phys. Lett. 1979. **A75**, N 1, 2. P. 1—2; Physica. 1980. **D1**, N 2. P. 219—226; Comm. Math. Phys. 1980. **74**, N 2. P. 189—197. [2] Eckmann J. P. // Rev. Mod. Phys. 1981. **53**, N 4. Pt. 1. P. 643—654. [3] Hirsch J. E., Nauenberg M., Scalapino D. J. // Phys. Lett. 1982. **A87**, N 8. P. 391—393. [4] Hu B., Rudnick J. // Phys. Rev. Lett. 1982. **48**, N 24. P. 1645—1648. [5] Eckmann J. P., Thomas L., Wittwer P. // J. Phys. A. 1981. **14**, N 12. P. 3153—3168. [6] Hirsch J. E., Huberman B. A., Scalapino D. J. // Phys. Rev. 1982. **A25**, N 1. P. 519—532. [7] Пиковский А. С. Препринт № 39 ИПФ АН СССР. Горький, 1981. [8] Pikovsky A. S. // J. Phys. A: Math. Gen. 1983. **16**. P. 109—112. [9] Ланда П. С., Стратонович Р. Л. // Изв. вузов, Радиофизика. 1987. **30**, № 1. С. 65—69. [10] Shraiman B., Wayne C. E., Martin P. C. // Phys. Rev. Lett. 1981. **46**, N 14. P. 935—939. [11] Matsumoto K., Tsuda I. // J. Stat. Phys. 1983, **31**, N 1. P. 87—108.

Поступила в редакцию
07.01.86