КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 530.145.6

ОДНОМЕРНАЯ КУЛОНОВСКАЯ ЗАДАЧА. ДИСКРЕТНЫЙ СПЕКТР

В. Б. Гостев, И. В. Гостев, А. Р. Френкин

(кафедра теоретической физики)

Точно решена квантовомеханическая задача о движении нерелятивистской частицы в одномерном кулоновском поле $\lambda|x|^{-1}$. С помощью принципа «минимальности» точечного потенциала, индуцированного кулоновским, найдены волновые функции и уровни энергии четных состояний дискретного спектра.

Одномерный атом водорода (1 H) рассматривался уже давно в ряде работ, в особенности в связи с изучением поведения атома водорода в сильном магнитном поле [1, с. 527—528]. При этом обычно принималось, что решения уравнения Шрёдингера для 1 H (дискретный спектр)

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{\lambda\psi}{|x|}+E\psi=0 \tag{1}$$

($\hbar=2m=1$) двукратно вырождены по четности [2], [1, с. 528], [3, 4] и энергия основного состояния не ограничена снизу — имеет место падение на дно ямы (на центр) [2—4]. Оба этих явления объяснялись в работе [3] специфической скрытой симметрией кулоновского поля.

В настоящей заметке мы покажем, что уровни кулоновской задачи (1) не вырождены, как и любые уровни дискретного спектра одномерного движения, энергия основного состояния конечна, а вырождение уровней и падение на дно [2, 3] вызываются не скрытой симметрией 1 H, а крайне неудачным выбором граничного условия для четных решений уравнения (1).

Так как два линейно независимых решения уравнения (1) в интервале $(0, \infty)$ при $x\to+0$ имеют вид [5]

$$\psi_-(x)=x, \tag{2}$$

$$\psi_+(x)=1+\lambda(x-x\ln x), \tag{3}$$

то построить четное решение в интервале $(-\infty, \infty)$, удовлетворяющее стандартному условию

$$\psi'(0)\psi^{-1}(0)=0 \tag{4}$$

невозможно. Поэтому при выборе четного решения воспользуемся принципом «минимальности» дополнительного точечного потенциала. Заметим, что выбор четного решения в виде комбинации

$$\psi_\alpha=\cos\alpha\psi_+(|x|)+\sin\alpha\psi_-(|x|),\quad -\pi/2\leqslant\alpha\leqslant\pi/2, \tag{5}$$

обеспечивает самосопряженность гамильтониана (1) и приводит к дополнительному точечному потенциалу [6] за счет бесконечного скачка логарифмической производной функции (5) при $x\to0$:

$$U(x)=-2\lambda\ln|x|\delta(x)+2\operatorname{tg}\alpha\delta(x),\quad -\pi/2<\alpha<\pi/2, \tag{6}$$

$$U(x)=\pm2|x|^{-1}\delta(x),\quad \alpha=\pm\pi/2. \tag{7}$$

Физическое требование минимальности числа слагаемых в потенциале (6) и отсутствия явления Клаудера [7] приводит к однозначному выбору [6]

$$\alpha=0. \tag{8}$$

Потенциал же (6) при $\alpha\neq0$ следует рассматривать как дополнение кулоновского потенциала (1) δ-образным $(2\operatorname{tg}\alpha\delta(x))$.

Перейдем к нахождению дискретных уровней ($\lambda>0$, $E<0$). Так как на нечетные состояния δ-образный потенциал не действует, то нечетные уровни совпадают с радиальными кулоновскими (s-состояния):

$$E_{n-} = -\frac{\lambda^2}{4(n+1)^2}; \quad n=0,\ 1,\ 2\ .\ .\ .\ , \tag{9}$$

а волновые функции — с нечетно продолженными радиальными функциями

$$\psi_{n-}(x) = xe^{-\frac{\lambda|x|}{2(n+1)}} F\left(-n,\ 2,\ \frac{\lambda|x|}{n+1}\right), \tag{10}$$

где $F(a,\ b,\ y)$ — вырожденная гипергеометрическая функция [1, с. 741]. Для четных состояний (5) решения уравнения (1) в силу квадратичной интегрируемости должно иметь вид ($x>0$) [5]

$$\psi = xe^{-\frac{\lambda x}{2q}} U\left(1-q,\ 2,\ \frac{\lambda x}{q}\right), \tag{11}$$

где

$$q = \frac{1}{2}\lambda(-E)^{-1/2},\quad E = -\frac{\lambda^2}{4q^2}, \tag{12}$$

$U(a,\ b,\ z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция, регулярная на бесконечности [8, с. 266] ($U(a,\ b,\ z) = z^{-a}$, $z\to+\infty$). Потребовав совпадения решений уравнения Шрёдингера (5) ($x>0$) и (11) и воспользовавшись формулами (2), (3) и разложением решения (11) при $x\to+0$, получаемым с помощью $U(1-q,\ 2,\ z) = \Gamma^{-1}(1-q)z^{-1} + \Gamma^{-1}(-q)\ln z + \Gamma^{-1}(-q)[\psi(1-q) - \psi(1) - \psi(2)] + \ldots$ [8, с. 248], $\psi(z) = -0{,}5772\ .\ .\ . + (z-1)\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(z+n-1)}$ — пси-функция, после преобразований получаем характеристическое уравнение

$$\lambda[-\ln\lambda + f(q)] = \operatorname{tg}\alpha, \tag{13}$$

$$f(q) = -0{,}5772\ .\ .\ . + \ln q - \frac{1}{2q} + q\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m(m-q)}, \tag{14}$$

корни которого $q_n(\lambda,\ \alpha)$, $n=0,\ 1,\ 2\ldots$ с помощью формулы (12) дают четные уровни энергии, а с помощью формулы (11) и замены $q\to q_n$ — четные волновые функции.

Функция $f(q)$ имеет простые полюсы при $q=0,\ 1,\ 2$ и монотонно возрастает ($f'(q)>0$) при $n<q<n+1$, $n=0,\ 1,\ 2\ldots$ (т. е. график функции $f(q)$ имеет вид «непериодической тангенсоиды», сдвинутой на полпериода). Отсюда для четных уровней энергии

$$E_{n+} = -\frac{\lambda^2}{4q_n^2(\lambda,\ \alpha)},\quad n=0,\ 1,\ 2\ .\ .\ . \tag{15}$$

получаем следующие свойства ($-\pi/2<\alpha<\pi/2$).

1) $E_{(n-1)-} < E_{n+} < E_{n-}$, $n>0$; $E_{0+} < E_{0-}$, (16)

т. е. дискретный спектр не вырожден и имеет место, как и должно быть в случае одномерного финитного движения в четном поле, чередование уровней с разной четностью (основное состояние четно).

2) $\lim\limits_{\alpha\to\pi/2} E_{n+} = E_{n-}$, (17)

$$\lim_{\alpha\to-\pi/2} E_{n+} = E_{(n-1)-}, \tag{18}$$

$$\lim_{\alpha\to-\pi/2} E_{0+} = -\infty, \tag{19}$$

т. е. вырождение по четности имеет место только при неудачных выборах параметра смеси (5) $\alpha=\pm\pi/2$, когда возникает либо непроницаемый барьер ($\alpha=\pi/2$), либо непроницаемая яма ($\alpha=-\pi/2$) (7) [9] и индуцированный кулоновским потенциалом (1) потенциал (7) не выключается при $\lambda\to 0$ (1) — имеет место явление Клаудера [7].

Падение на дно происходит только при $\alpha=-\pi/2$, когда невырожденный уровень основного состояния проваливается в яму (19), что никак не связано со скрытой симметрией $O(2)$ одномерного кулоновского взаимодействия [3] и осуществляется, например, в поле $V(x)=x^2+s(s+1)x^{-2}$, $-1/2<s<1/2$, $\alpha\to-\pi/2$ (характеристическое уравнение приведено в [10]).

3) Простой подсчет показывает, что при $\alpha=0$ $dE_{n+}/d\lambda<0$, несмотря на конкуренцию потенциалов притяжения (1) и отталкивания (6) при $\alpha=0$.

Таким образом, нам удалось реабилитировать стандартные положения квантовой механики одномерного финитного движения в четном притягивающем поле в случае кулоновского поля 1 Н.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. М., 1974. [2] Loudon R. // Amer. J. Phys. 1959. **27**. P. 649—655. [3] Давтян Л. С., Погосян Г. С., Сисакян А. Н., Тер-Антонян В. М. Препринт ОИЯИ Р-2-86-393. Дубна, 1986. [4] Винницкий С. И., Погосян Г. С., Сисакян А. Н., Тер-Антонян В. М. Сообщение ОИЯИ Р-2-86-571. Дубна, 1986. [5] Гольдбергер М., Ватсон К. Теория столкновений. М., 1967. С. 238. [6] Гостев В. Б., Минеев В. С., Френкин А. Р.//ТМФ. 1987. **70**. С. 341—353. [7] Klauder J.//Acta Phys. Austr. Supp. 1973. **11**. P. 341—387. [8] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М., 1973. Т. 1. [9] Гостев В. Б., Френкин А. Р. // // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3, Физ. Астрон. 1987. **28**, № 3. С. 85—87. [10] Гостев В. Б., Минеев В. С., Френкин А. Р. // ТМФ. 1986. **68**. С. 45—57.

Поступила в редакцию
19.01.87

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1987. Т. 28, № 5

РАДИОФИЗИКА

УДК 621.385

ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ ПРОДОЛЬНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ЭЛЕКТРОННОГО ПОТОКА С ПОВЕРХНОСТНЫМИ ВОЛНАМИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СТРУКТУР

В. И. Канавец, А. И. Слепков, А. В. Федоров, В. А. Черепенин

(кафедра радиофизики СВЧ)

Построена линейная теория продольного взаимодействия релятивистского электронного потока с дифракционным полем открытых периодических структур в режиме возбуждения поверхностных волн. Показано, что в данном случае возрастание амплитуд дифракционных гармоник вблизи аномалии Вуда соответствует черенковскому резонансу электронов с поверхностной волной.

В работе рассмотрены особенности возбуждения поверхностных волн ленточным релятивистским потоком электронов, пролетающих над плоской идеально проводящей дифракционной решеткой прямоугольного профиля (рис. 1). Период решетки l, ширина щели d, высота зубца h. Длина решетки в продольном (ось Oy) направлении L, в поперечном направлении (ось Ox) система бесконечна; расстояние до потока b, толщина потока много меньше b. Рассматривается продольное взаимодействие потока и поля на фиксированной частоте ω, зависимость всех физических величин от времени t принимается в виде $e^{-i\omega t}$.

Продольная компонента линейной плотности тока на частоте ω задается выражением:

$$j=\left(j^{(+)}e^{-i\beta_q y}+j^{(-)}e^{i\beta_q y}\right)e^{i\beta_e y}, \tag{1}$$